量子論と代数

思考と表現の進化論

谷 村　省 吾

1. 物理学と数学

*1) 最初提案していただいたタイトルは「量子論と数学」なのだが，数学はとても大きな学問分野であるのに対して量子論は物理学の一分科にすぎないので,「量子論と数学」ではバランスが悪いと考え，タイトルを「量子論と代数」とさせていただく．

ただ，物理学と数学なら，多少はバランスがよいし，思考を刺激されるテーマでもある．さらに視野を広げて自然科学の観点から物理学と数学の対比を考えてみよう．まず，自然科学とは自然物の諸々の存在様式と現象を記述し予測する規則の体系，もしくはそのような体系を作る営みである．自然科学の中でも，なるべく多くの対象に共通な規則･秩序を見い出すことを目指す分野を物理学という．物理学は対象を生物だけとか地球だけとか分子だけに限定したくないという態度をとる．人間の習慣･好み･目的に依存することがらは万物に共通とは言えないので物理学の対象から外される．何よりも物理学は現実世界で確かめられることを語ることを要求される．いつどこで誰が実験してもそのようになることを言い当てるのが物理学だと言ってもよい．しかも物理学の記述や予測は定量的であることが要求される.「速い」とか「遅い」といった定性的な記述ではだめで，実験で測れる数値を予測しなければならない．定量的な扱いをしないと,「同じ結果」の再現方法を表現できないし，予測と観測結果とが「どれくらい当たっているのか，あるいは，どれくらい外れているのか」を評価できない．そこで物理学は，共通の法則を定立して多様な現象を説明・予測するという形をとり，そのために論理的に演繹推論できる理論体系をよしとし，数式を使って諸々の物理量の関係を述べるという形式で発達してきた．

一方で数学は，諸々の命題が関係し合って出来上がる理論体系である．例えば「整数 x が 12 で割り切れる」から「整数 x が 3 で割り切れる」を導くことができるが，“あの命題からこの命題が導かれる” という演繹・含意関係が数学では最も重視される．数学は言葉の世界の学問であり，しかも書き言葉のみを頼りとし，どのような言語を用いる人でも同じように推論できることを保証するために究極的には数学は記号のみで記述される．

このように数学を規定すると，数学は自然界とはまったく関係のない学問のように思われるが，私はそう思っている．はっきり言って数学は自然科学ではない．数学は現実世界との接点を必要としていないし，物理法則に制約もされない．ただ，一つの数学理論の中で矛盾が起きないことが肝心である．互いに矛盾する二つの数学理論があってもよい．その点，自然科学の理論は複数あっても互いに矛盾することを言ってはいけないとされてい

*1) 本稿は数理科学（サイエンス社）2018 年 3 月号 (Vol.56-3, No.657), 特集テーマ「量子論的思考法のすすめ」，pp.42–48 に掲載された．

る（例えば，生物学は化学と矛盾しない）．

ところが不思議なことに，本来現実世界とは無縁なはずの数学が自然科学で役に立つ．とくに物理学は数学なしにはやっていけないのである．

2. 数学は物理学の言葉である

例えば質点の運動の法則と万有引力の法則は（記号の説明なしに書いてしまうが）

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1}$$

と書けるが，数式を使わずに同じ内容を紛れなく述べるのは大変である．この法則から，すべての惑星や彗星は太陽を焦点とする楕円か放物線か双曲線軌道を描くことや，楕円軌道を一周するのに要する時間の 2 乗は軌道長半径の 3 乗に比例するといった現象（の秩序）を予測することができるが，数式を使わずにこの結論を導くことは非常に難しい．逆に，前提となる法則がいったん (1) のような数式の形に書けたら，計算だけでいろいろな結論を導ける．しかも，計算とは記号の並び替え・書き換えにすぎない．そのような技法で惑星や衛星の運動を言い当てることができるのは奇跡のような気さえする．

ウィグナーは量子力学や固体物理・原子核物理の研究で活躍した物理学者だが，1959 年に “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences” と題する講演を行った[1)]．直訳すると「自然科学における数学の不合理な有用性」である．数学は自然科学においてあまりにも便利である．とくに物理学では，推論・計算をする上で数学が便利だというだけでなく，そもそもの前提となる物理法則を数学以外の言葉では言い表せない．そのように世界が成り立っていることは不思議だし，そのような数学を人類が創造したことも不思議だ．しかも，もともと物理のために創られたのではない数学概念が，のちに物理を語る言葉として使われることがある．そのようなことはまことに不思議で，合理的に説明できない，というのがウィグナーの論の概要である．

たしかに数学と物理学は切っても切れない関係にあり，そのことはまだ「科学 (science)」や「物理学 (physics)」という言葉がいまのように狭い意味ではなかった頃から意識されていた．ガリレオは「宇宙という書物は数学の言葉で書かれている」という言葉を残している（『贋金鑑識官』[2)]，1623 年）．

また，ニュートンの『自然哲学の数学的原理』[3)]（通称『プリンキピア』あるいは『プリンシピア』，初版 1687 年）は，そのタイトルからして自然科学は数学で語られると宣言している．その本文も定義・法則（公理）・定理・証明の列挙という構成であり，明らかにユークリッドの原論（古代ギリシャの数学書）の流儀を踏襲している．プリンキピアの序文にニュートンは「より近い時代の人たちは，実体形相と超自然性とを排して，自然現象を数学的法則に帰着させようと試みました」と書いている．自然現象の規則性の記述・分析に数学を用いることが，この頃に，はっきりと意識されて行われていたのである．

ただし，この時代に数学的スタイルで書かれたのは自然科学の書物だけではなかった．例えば，スピノザの『エチカ』[4)]（1677 年出版）は倫理学（ethics，道徳哲学）の書物であり，第 1 部「神について」，第 2 部「精神の本性と起源について」といった各部の題からして自然科学のテーマではないが，この本も構成は定義・公理・定理・証明の列挙である．ちなみに第 11 定理では神の存在が証明されている（しかも 3 とおりの証明が示されている）．エチカには『幾何学的秩序に従って論証された』という副題まで付けられている．こう見ると，ユークリッド原論で提示された数学的思考・表現方法は正しい論証の手本であり，自然科学だけが数学の技法を享受していたのではなかったことがわかる．が，数学と手を組んだ物理学は時を経るにつれ明らかに成功していったのである．

もう一つ注を述べると，プリンキピアは力学の本ではあるが，現代的な微分積分の数式は書かれていない．すべては幾何学的な論証である．「時間変数 t の関数 $x(t)$ で表される質点の位置」といっ

たものも書かれていない．時間は線分の長さで表記され，1 対 2 の比の時間間隔は，1 対 2 の長さの線分で表される．また，定木とコンパスを有限回使うことだけを許す初等幾何学ではなく，一点に向かって無限に近づく点列を扱う極限操作の幾何学を駆使している．しかも円錐曲線（楕円や双曲線）の扱いは “初等的” と呼べるレベルではない．なので，現代の物理学科の学生がプリンキピア（もちろん日本語訳でよい）を開いてみるとひどく読みにくいと感じるだろう．おそらくニュートンと同時代の人でもわかりくかったろうと思う．だからといってニュートンの本は読まれなかったわけではなく，他の数学者（とくにオイラー）がプリンキピアを解読して，力学に適した数学を編み出していったというのが真相に近いようである[5, 6)]．

3. それは不合理なのか？

さて，ウィグナーが，うまくいきすぎていると驚嘆したほどの物理学における数学の有用性・不可欠性だが，それがそんなに不合理なことだとは私は思わない．私見を披露させていただくが，自然科学というのは進化の産物だと私は思っている．

進化とは何か述べよう．我々は人間であり，生物である．生体は**自己複製子**の**発現**結果であり，自己複製子は**突然変異**と**淘汰**の対象である．何を言っているのかというと，我々の体は，DNA, 遺伝子と呼ばれる分子のレシピ（料理本）に従って組み立てられた分子の複合体であり，生体は他の分子を取り込んで（摂取・消化），分子を加工して自分の体の一部にしたり（同化・成長），分子からエネルギーを取り出したり（異化・運動）する装置である．私の遺伝子が私自身の体や私の行動様式や外界に影響を及ぼした結果を表現型という．また，私たちは子孫を生み増やす．このとき遺伝子は複製され，子孫に同じレシピを渡す．ただ，この複製は完全ではなく，ときどきエラーを生じる．それが突然変異である．性のある生物は遺伝子セットを組み換え，親が持っているのとは少し異なる遺伝子セットを子に渡す（一個体はいくつかの遺伝子をパッケージとして持っているので，その意味では遺伝子セットという呼び方をする）．そうすると，子は親とは少し違った体を作り，親とは少し異なった挙動を示す．ある子は，長生きし，たくさんの孫を生み残す．別の遺伝子セットを持った子は，あまり長生きできず，孫を残せずに死んでしまうかもしれない．長生きして多くの子を残せるかどうかは，自分の体と自分の挙動と環境しだいである．遺伝子の複製・増殖の成功率を圧迫する働きを淘汰という．

自己複製子・発現・突然変異・淘汰という条件がそろっていれば進化が起こる．ある個体が，遺伝子の発現の結果として生存と繁殖に成功すれば，その遺伝子コピーを持った個体が数を増す．環境が変わったとき，突然変異で生じた遺伝子が変化後の世界でたまたま有利であれば，新しい遺伝子コピーを持つ個体群が繁栄する．世代を重ねて，突然変異を繰り返すと，生存と繁殖によりいっそう有利な遺伝子セットと体と行動様式を持つ生物が現れるようになる．そういうプロセスが進化である．環境に適応した生物が増えすぎることも他の生物にとっては環境の変化であり，増えすぎた生物を食い物にする別の生物が繁栄する道を開く．ゆえに進化には最終形態というものがなく，とめどなく続く．

以上のようなことをドーキンスはわかりやすく明確に述べた（『利己的な遺伝子』[7)]，1976 年）．ついでにドーキンスは，遺伝子の視点からすれば我々個体は遺伝子の一時的な乗り物にすぎず，我々が「よかれ」と思ってやっている利他的自己犠牲行為（子供の世話をするとか家族を守るために戦うとか）も自己コピーを増やそうとする遺伝子のプログラムに従った結果にすぎない，という類のことを言って世間に衝撃を与えた．

我々人間もそういう進化の産物である．我々は眼や耳から入った光や音の刺激信号を脳で処理し，一連の信号群を関連付けて記憶する．また，脳は手足や口を動かす指令を送る．とくに人間は言語能力に優れ，眼前にないものや現実にはないものも想像する能力がある[8, 9)]．より正確に言うと，こ

れは現実ではないということを自覚しながら想像できる．現実的なことも仮想的なことも含めて，人が思い浮かべられるものごとをアイデアと呼ぶことにしよう．このような脳の情報処理・記憶・指令・発話・解釈・想像という能力も進化の産物である．そういう能力がこの世界での人類の生存と繁栄に有利に働いたのである．

さらに人間は人から人へアイデアを伝えたりアイデアを蓄えたりすることができる．脳の記憶容量だけに頼らずに，また，声の届く範囲に限定されずに，見たり聞いたり考えたりしたことを紙に書きとめ印刷して本にして保存し伝播する方法を編み出している．そうすると人の脳はアイデアの生産・一時保管所であり，人はアイデアのコピー作成・拡散装置でもある．また，あるアイデアは人の行動の仕方を変えることがある．例えば「何々を食べると痩せる」というアイデアは多くの人の購買摂食行動を変え得る．アイデアは写し間違いや付け足しが容易なので，どんどん変異する．あるアイデアは多くの人に広がり，別のアイデアはあまり広まらずに忘れられていく．アイデアの増殖率は，それが人にどんな影響を及ぼし，その結果，人がもっとこのアイデアを広めたい・まねしたいと思うかどうかにかかっている．そうすると，アイデアというものが自己複製・発現・変異・淘汰の主体になる．この意味でドーキンスはアイデアとか文化とか嗜好様式を **meme**（**ミーム**）と呼んだ．遺伝子のことを英語で gene（ジーン）と言い，模倣のことを mime（マイム，パントマイムのマイム）と言うが，「ジーン」のような響きがするようにマイムを言い換えたのが「ミーム」である．要するに，人の脳に宿って人の行動様式を変え，他の人に乗り移って，受け取った人もそのような行動をまねし出すときに，宿ったり増殖したりしているものがミームである．遺伝子の物理的実体は分子だが，ミームの物理的実体は特定し難く，私はそれをアイデアと呼んだ．

話がずいぶん脇道に逸れたが，要するに我々が数学とか物理学と呼んでいるものもミーム群だということが言いたいのである[10)]．数学も物理学も誰かが考え出したものであり，人の手を加えられ，人から人へと伝えられるものである．人が建物を建てたり，船を動かしたり，ロケットを打ち上げたり，テレビで映像を伝えたり，合成繊維で服を作ったり，遺伝子操作で病気になりにくい野菜を作ったり，人がいろいろなことをする上で自然科学の知識を使って物に働きかけるとうまくいったのである．自然科学がうまくいっているのは，それがこの世界に適応しているからである．数学の一部分が自然界の規則性の記述にちょうどうまく当てはまり，それを使うとものごとが正確に予測できることがわかったので，みんながそれをまねして使うようになったのである．

それでも疑問は残る．なぜ自然界には数学的記述を許すような規則性があるのか？という疑問である．自然界に規則性があることが不思議であり，人間の想像の産物であるところの数学が自然法則を記述し自然現象を予測できることが不思議だ，というのである．ウィグナーのもともとの問題提起はこれらの疑問を指しているのだろう．

自然界に法則性があることを認めるならば，そして，この世界を知覚し考えて動いてコミュニケーションする生き物が生ずれば，自然界のありようにフィットしたミーム群がいつか生まれ，生物が「私たちは自然のしくみを理解している」と自覚し，自分たちに都合のいいように自然界に働きかけることは不思議ではないと私は思う．自然科学のすべてのアイデアが自然現象を正確に記述し予測することに成功したわけではない．自然界をうまく説明できないアイデアは淘汰されている．科学の歴史には，失敗して捨てられ忘れられたアイデアの屍が転がっている．物理学の成功例だけを見て「成功したのは奇跡だ，不合理だ」と言うのは待ってほしい．たくさんのアイデアが生まれて，うまくいかなかったものは引き継がれずに消えていき，うまくいったアイデアにはますます改良の手が加えられていったのである．生き残ったものが素晴らしいのにはそれなりに訳がある．

このように言ってしまうと，自然科学で使われていない数学の分野がどうしてあるのか？という

疑問も招くかもしれない．数学の原初的なアイデアは，現実世界における人間の経験に基づいていると私は思う．点とか直線とか空間とか集合とか整数とか連続写像といった数学概念は，人間の素朴な感覚と経験から発している．ただ，人間には，経験世界から離脱して概念を抽象化するという能力がある．この能力にかかると，もはや点や直線は目の前の地面や紙に束縛された図形である必要はなくなる．人間は想像の世界の中で概念を操ることができるし，そのような操作の結果が噛み合うことを喜ぶ．なぜ，そのような能力を人間は獲得したのか？ それは，目の前の出来事のみに思考を縛られている生物と，眼前にはないものも想像して頭の中で操作して言語化して他者に伝達する生物とが現れたとき，どちらの方が生存・繁殖に有利だったか？という問題に帰着すると思う．答えは，想像力と伝達方法を持つ生物の方が有利だったのである．そういう能力がある方が，いま現在目の前にあるものだけに囚（とら）われずに未来のことを考えることができる．そうすると，いまはまだない収穫物を得るために計画を立てて仲間と協力して行動できるので，狩りをしたり，罠（わな）をしかけたり，食料を蓄えたり，武器や調理器具を作り置きしたり，農耕したりするのに有利だったのだろう[8]．

では，なぜ想像の世界だけで概念操作して合点することが楽しいのか？ 人は，ばらばらに見えたことがらのつながりが見えて筋の通ったストーリーが組み立てられることを快く感じるのではないだろうか．逆に，筋の通らない話には違和感や不安を感じるのではないか．外界の情報から首尾一貫したストーリーを構成できれば，将来に起こることも予測しやすく，安全に生き延びることができるので，合点がいくことは「快」と評価してよい．この「快」は「いいぞ，もっとやれ」という信号の別名である．人間は，ストーリー構成機構と，「首尾一貫していたら快」と判定するフィードバック機構を備えており，それで，当座，自然物相手に使う当てのない数学も喜んで創り，操れるのだろう[9]．

最後に残る疑問，自然界に規則性・秩序があるのはなぜか？について．自然に規則性があったことはラッキーだったとしか言いようがないだろう．もしも自然界が何の規則性もないランダムな世界だったら，そもそも太陽とか惑星とか生物というものも現れなかっただろう．人間は「こうではない，他の世界」をも想像し，「どうして現実はそうなっていないのか？」という問いを立てて合理的な説明を懇願することができてしまう．それで「どうして世界はこんなふうなのか？」という問題提起までしてしまうが，それはもはや想像力の無駄遣いであり暴走だと私は思う．

4. 量子力学と数学

さて，ここから量子力学と数学の話に入ろう．量子力学は，原子や電子や光子や素粒子などミクロの物質世界に関する物理法則の体系である．量子論という言葉の方が量子力学よりもやや広い意味で使われるが，大差はない．量子力学は 1900 年から 1927 年頃にかけて創り上げられた理論である．完成までにかなりの年月がかかっただけあって，大勢の（10 名以上の）人たちの手を加えられて磨き上げられていった．つまり，一人の天才が突然一つの理論を完成させるようにして量子力学が出来たわけではない．

量子力学がそれまでの物理理論と大きく異なっているのは，人間の目に見えず手に触れていることもわからないミクロの対象を相手にしているという点と，現実世界との対応が不明な数学的概念を大々的に使って理論が構築されているという点である．それまでの物理理論は，質点や剛体や流体の運動や，光や熱や電気や磁気の現象など，人間が直接的に知覚できるものを扱っていた．もちろん熱や電気の正体が何かと言うことは難しいが，熱は，熱いとか冷たいといった感覚によって「そこに何かがある」と感じられる対象である．電気も摩擦電気で手ごたえを感じることができるし，磁石同士が力を及ぼしていることも目と手で確かめられる．古典力学は，関数 $x(t)$ といった数学概念を使うが，それは質点の位置を見たままに記述し

ていると確信できるものだった．

ところが，量子力学（場の量子論も含める）は抽象度の高い数学的概念をばんばん使う[11]．ヒルベルト空間・状態ベクトル・波動関数・演算子・複素数・ゲージ場・ディラック場・ゴースト場など，どれも実験室で直接的に見つかるものではないが，これらはみな量子論の言葉である．これらの概念を組み合わせて操ることによって，ある原子がどんな波長の光をどの程度吸収するかとか，どの原子とどの原子がくっついてどんな大きさ・形の分子ができるかとか，いろいろなことを定量的に予測できる．さらに頑張ると，これこれの質量とこれこれのスピンを持つ素粒子があるはずだ，その素粒子があるなら何々の実験をしたときに何々が起こるはずだ，ということまで予測できる．じつはウィグナーが「不合理なまでの有用性」だと感心したのは，主に量子力学における数学の有用性のことを指していた．

量子力学の諸概念は現実世界との接点がまったくないわけではないのだが，接点は希薄であり，量子力学の言葉と現実の世界とを結びつけるためには絶妙な解釈が必要になる．また，それゆえに，物理学の理論がそんなことでいいのかという批判の的にもなり，量子力学の解釈に関する論争が絶えない．ただ，そういう批判者も，理論物理はこうあるべきだとか，もっといい解釈があるはずだと考え，自己流の勝手な想像物を心に描いていて，量子力学がそうなっていないのはけしからんと言っているだけのことがある[12]．

5. 代数的量子論

量子力学の数学的定式化には何通りか流儀があるが，私のいま一番のお気に入りは代数的量子論という定式化で，これを紹介したい[13]．

代数的量子論のあらましはこんなふうである．物理量を X, Y といった記号で表し，これらを足し算 $X+Y$，掛け算 XY，スカラー倍 cX（c は複素数）したものも物理量である．結合律と分配律を仮定するが，可換律は仮定しない．つまり $YX = XY$ とは限らない．一つの系の物理量全体の集合を**物理量代数** (observable algebra) と呼ぶ．物理量代数には単位元と呼ばれる特別な元 I があり，これはどのような物理量 X と掛け算しても $IX = XI = X$ を満たす．また，物理量 X に対して $X'X = XX' = I$ となるような物理量 X' があれば，X は可逆であるといい，X' を X の逆元という．ちなみに $AB = 0$ かつ $B \neq 0$ ならば A は非可逆である．

物理量は数ではないが，測れば数値化されるものである．数（一般には複素数）λ に対して $(X-\lambda I)$ が非可逆ならば，λ を X の**スペクトル値**という．一つの物理量のスペクトル値は複数個あり得る．物理量 X を測定すると，X のスペクトル値のどれかが観測される，と解釈する．本当はスペクトル値 λ が測定値として得られる確率を決めるために状態（状態ベクトルではない）という概念を導入した方がよいのだが，ここでは状態概念を使わなくてもやれることを説明する．

いま考えている系は X と Y という 2 つの物理量を持っているとする．$X \neq \pm I, Y \neq \pm I$ だが $X^2 = I, Y^2 = I$ と仮定する．このとき $X+Y$ はどんな値を取り得るだろうか？

$X^2 = I$ を式変形して $X^2 - I = (X-I)(X+I) = 0$ となることから，± 1 が X のスペクトル値である．要するに 2 次方程式を解いているだけである．同様に Y のスペクトル値も ± 1 である．

直観的には，X も Y も ± 1 のどちらかの値を取るのであれば，$X+Y$ は 2 か 0 か -2 のいずれか値を取りそうだと予想される．以下では二通りの規則を仮定してそれぞれ計算する．

(i) 可換代数 $YX = XY$ を仮定した場合．$(X+Y)^2 = X^2+XY+YX+Y^2 = I+2XY+I$ となる．この式からさらに計算を進めると，

$$(X+Y)(X+Y-2I)(X+Y+2I) = 0 \quad (2)$$

を導ける（やってみてほしい）．この式から $X+Y$ のスペクトル値は $0, 2, -2$ であることがわかる．これは直観どおりの結果である．

(ii) 非可換代数 $YX = -XY$ を仮定した場

合．$(X+Y)^2 = X^2+XY+YX+Y^2 = I+XY-XY+I=2I$ となり，難なく

$$\left(X+Y-\sqrt{2}I\right)\left(X+Y+\sqrt{2}I\right)=0 \quad (3)$$

が導かれる．従って $X+Y$ のスペクトル値は $\pm\sqrt{2}$ である．$1+1$ が 2 にならずに $\sqrt{2}$ になった！ これは妙な結果である．じつは (i) の可換代数が古典力学，(ii) の非可換代数が量子力学の数学である．

もう少し話を進めよう[14, 15]．次の系は A,B,U,V という 4 つの物理量を持っている．これらは $A^2=B^2=U^2=V^2=I$ を満たすとする．このとき $S=AU+AV+BU-BV$ はどんな値を取るか？

(iii) 可換代数を仮定した場合．$BA=AB$ という具合に，どのような積も順序を入れ換えても変わらないと仮定すると，$S^2=4I$ が導かれる（確かめてみてほしい）．従って

$$(S-2I)(S+2I)=0 \quad (4)$$

となり，S のスペクトル値は ± 2 であることがわかる．あるいは，こう考えても同じ結論が導かれる．S の式は $S=A(U+V)+B(U-V)$ のように書き直せる．U,V は ±1 のどちらかの値を取るのだから，$U+V$ と $U-V$ は ±2 か 0 のいずれかの値を取る．しかも $U+V$ が ±2 になるとき $U-V$ は必ず 0 だし，$U+V$ が 0 になるとき $U-V$ は ±2 である．また，A,B は ±1 のどちらかの値を取るので，$S=A(U+V)+B(U-V)$ の値は ±2 しかあり得ない．

(iv) 非可換代数を仮定した場合．

$$UA=AU,\, VA=AV,\, UB=BU,\, VB=BV,$$
$$BA=-AB,\, VU=-UV \quad (5)$$

という関係を仮定する．長い計算の末に

$$\left(S-2\sqrt{2}I\right)\left(S+2\sqrt{2}I\right)S=0 \quad (6)$$

が導かれ，S のスペクトル値は $\pm2\sqrt{2}$ と 0 であることがわかる．これはかなり奇妙な結果である．古典力学的な可換代数を用いた (iii) の推論は，物理量 A,B,U,V が ±1 の値を取るなら S の値が ±2 になることを当たり前のように示している．しかし，量子力学的な (iv) は，S の値は $\pm2\sqrt{2}$ または 0 だと答えている．$\pm2\sqrt{2}=2.8284\cdots$ は明らかに 2 よりも大きい．普通に考えたら，A や U が ±1 のどちらかの値を取るなら，それらの値が確率的に変動したとしても，$S=A(U+V)+B(U-V)$ の値は ±2 であり，その平均値 $\langle S\rangle$ は $-2\le\langle S\rangle\le2$ の範囲に収まるはずである．量子力学では物理量の値がランダムに変動し得るということを考慮しても S の $\pm2\sqrt{2}$ という値は異常に見える．しかしミクロ系に対して実験してみると $\langle S\rangle=\pm2\sqrt{2}$ という平均値が実測されるのである[13, 14]．

仮定した式 (5) の物理的意味を言おう．これは遠く離れた 2 箇所で測定を行う状況を想定して，P 地点では A または B という物理量を測り，Q 地点では U または V という物理量を測るとしている．(5) の 1 行目の式は，離れた場所の物理量は可換だと言っている．P 地点で何を測ろうと瞬時に Q 地点に影響が及ぶことはないという条件である．(5) の 2 行目は，P 地点で A と B を同時に数値化することはできないと言っている．数値だったら $ba=ab$ という可換律が成り立つはずだからだ．同様に，U と V も非可換な物理量であり，同時に数値化することはできない．だから「U,V が同時に 1 という値を取るならば $U+V$ は 2 になる」という推論の前提が成立せず，$U+V$ が $\sqrt{2}$ になるという現象が起こり得る．この，代数の非可換性が量子力学の最大の特徴であり，古典力学にはなかったさまざまな現象を引き起こすのである．

最後に，量子力学をよく知っている読者向けに一言二言．以上の議論は**ベルの不等式の破れ**として知られていることである[13~15]．通常の量子力学ではエンタングル状態ベクトルと演算子を用いてベルの不等式の破れを導くが，いまの議論はベクトルや行列をまったく使わなかった．ヒルベルト空間論の立場からすれば，数ベクトルや行列はヒルベルト空間の具体的な基底の採り方に依存しており，その意味では人為的な概念だ．演算子はヒルベルト空間の基底の採り方に依存しない概念だが，物理量代数はヒルベルト空間にすら依存しな

い．つまり，数ベクトル・波動関数・行列／ヒルベルト空間・演算子／物理量代数の順に，よりいっそう抽象度が高く，基底や表現の選択に依存しない概念になっている．記述系の選択に依存しないということは，より実体に迫る概念になっているということであり，物理理論としては望ましいことではないだろうか．

なお，(2), (4), (6) を導く計算の詳細をサイエンス社ウェブサイト（http://www.saiensu.co.jp）のサポートページに掲載しておく．

参考文献

1) E. P. ウィグナー（岩崎洋一ほか訳）『自然法則と不変性』ダイヤモンド社 (1974), 第 17 章. 原著 1967 年. http://ch.nicovideo.jp/niconicoffee/blomaga/ar1125952 に日英対訳あり．第 4 章は 1963 年のノーベル物理学賞受賞講演録で，それも参考になる．
2) ガリレオ（山田慶兒・谷泰 訳）『贋金鑑識官』，豊田利幸責任編集『中公バックス 世界の名著 26』中央公論社 (1979)，第 6 節，p.308.
3) ニュートン (河辺六男 訳)『自然哲学の数学的原理』, 河辺六男責任編集『世界の名著 26』中央公論社 (1969), 第 1 版の著者序文，pp.55–58.
4) スピノザ（工藤喜作・斎藤博 訳）『エチィカ』，下村寅太郎責任編集『世界の名著 25』中央公論社 (1969).
5) 山本義隆『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』日本評論社 (1997).
6) 中根美知代ほか『科学の真理は永遠に不変なのだろうか』ベレ出版 (2009). とくに第 4 章「ニュートンは運動方程式 $F = ma$ を書いたのだろうか？」（有賀暢迪）が参考になる．
7) リチャード・ドーキンス（日高敏隆ほか訳）『利己的な遺伝子』紀伊國屋書店 (1991). 原著初版 1976 年.
8) ユヴァル・ノア・ハラリ（柴田裕之 訳）『サピエンス全史 上, 下』河出書房新社 (2016). 原著 2011 年.
9) 戸田山和久『科学哲学の冒険』NHK 出版 (2005). 戸田山和久『哲学入門』筑摩書房 (2014). 戸田山和久『恐怖の哲学』NHK 出版 (2016). これらの本からヒントをもらった．
10) 谷村省吾「ミームとしての科学」，現代数学 2014 年 2 月号 p.3.
11) 佐藤文隆「量子力学のフォン・ノイマン」，現代思想 2013 年 8 月臨時増刊号（青土社）第 41 巻第 10 号, pp.72–80. フォン・ノイマンの『量子力学の数学的基礎』が物理学者たちにどういうふうに受け止められたか知る上で興味深い記事.
12) H. Halvorson, R. Clifton, “Reconsidering Bohr’s reply to EPR”, in *Non-locality and Modality*, pp. 3–18 (2002). arXiv quant-ph/0110107.
13) 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」，理系への数学（現代数学社）2010 年 5 月号から 2012 年 4 月号まで連載．代数的量子論の解説．とくに「第 8 回：ベルの不等式とミステリー姉妹」2010 年 12 月号 pp.59–65.
14) 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」，別冊日経サイエンス No.199『量子の逆説』pp.66–75 (2014). 補足記事がウェブにある．
15) T. Isobe, S. Tanimura, “A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test”, Prog. Theor. Phys. **124**, 191–205 (2010).

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報学研究科）

『量子論と代数―思考と表現の進化論』の補足解説

谷 村 省 吾

このノートは数理科学 2018 年 3 月号 pp.42–48 に掲載された記事『量子論と代数』(以下では本稿と呼ぶ) に対する補足解説 (supplementary commentary) である．第 1 版を 2018 年 1 月 19 日に書き下し，語句の修正を施して第 6 節以降を加筆した第 2 版を 2018 年 3 月 28 日に完成した.

1. スペクトル値と最小多項式

単位元 I を持つ複素係数体上の結合的代数の元 X と複素数 λ について，$(X - \lambda I)$ の逆元が存在しないならば λ を X の**スペクトル値** (spectral value) という.

$B \neq 0$ かつ $AB = 0$ ならば A の逆元はない．もしも A の逆元 A^{-1} があれば $B = IB = A^{-1}AB = 0$ となり仮定に反するから.

いま代数の元 L と複素数 a, b について $a \neq b$ かつ $L \neq aI$ かつ $L \neq bI$ および

$$(L - aI)(L - bI) = 0 \tag{S.1}$$

が成り立つとする．このとき a, b は L のスペクトル値であることは明らか．また,

$$P_a := \frac{L - bI}{a - b} \neq 0, \tag{S.2}$$

$$P_b := \frac{L - aI}{b - a} \neq 0 \tag{S.3}$$

とおくと,

$$I = P_a + P_b = \frac{L - bI}{a - b} + \frac{L - aI}{b - a}, \tag{S.4}$$

$$L = aP_a + bP_b = a\frac{L - bI}{a - b} + b\frac{L - aI}{b - a} \tag{S.5}$$

が成り立つことが確かめられる．また,

$$
\begin{aligned}
P_a^2 &= \frac{(L-bI)(L-bI)}{(a-b)^2} = \frac{\{(L-aI)+(a-b)I\}(L-bI)}{(a-b)^2} \\
&= \frac{0+(a-b)I(L-bI)}{(a-b)^2} = \frac{L-bI}{a-b} = P_a
\end{aligned} \tag{S.6}
$$

であり，同様に

$$
P_b^2 = P_b \tag{S.7}
$$

も成り立つ．明らかに

$$
P_a P_b = P_b P_a = \frac{(L-aI)(L-bI)}{(b-a)(a-b)} = 0 \tag{S.8}
$$

が成り立つ．

$$
LP_a = P_a L = aP_a, \qquad LP_b = P_b L = bP_b \tag{S.9}
$$

も確かめられる．さらに $\lambda \neq a, b$ として

$$
L'_\lambda := \frac{1}{a-\lambda} P_a + \frac{1}{b-\lambda} P_b \tag{S.10}
$$

とおくと

$$
(L-\lambda I)L'_\lambda = \frac{a-\lambda}{a-\lambda} P_a + \frac{b-\lambda}{b-\lambda} P_b = P_a + P_b = I \tag{S.11}
$$

となり，$L'_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ が (S.10) のとおり具体的に存在している．ゆえに L のスペクトル値は a, b に限られる．

次いで，代数の元 M と複素数 a, b, c について a, b, c は互いに異なり，$(M-aI)$, $(M-bI)$, $(M-cI)$ のうちのどの二つの積も 0 ではなく，

$$
(M-aI)(M-bI)(M-cI) = 0 \tag{S.12}
$$

が成り立つとする．このとき a, b, c が M のスペクトル値であることは明らか．また，

$$
Q_a := \frac{(M-bI)(M-cI)}{(a-b)(a-c)} \neq 0, \tag{S.13}
$$

$$
Q_b := \frac{(M-aI)(M-cI)}{(b-a)(b-c)} \neq 0, \tag{S.14}
$$

$$
Q_c := \frac{(M-aI)(M-bI)}{(c-a)(c-b)} \neq 0 \tag{S.15}
$$

とおくと，やや長い計算によって

$$
I = Q_a + Q_b + Q_c \tag{S.16}
$$

が成り立つことが確かめられる．また，

$$
\begin{aligned}
Q_a^2 &= \frac{(M-bI)^2(M-cI)^2}{(a-b)^2(a-c)^2} \\
&= \frac{\{(M-aI)+(a-b)I\}(M-bI)(M-cI)\{(M-aI)+(a-c)I\}}{(a-b)^2(a-c)^2} \\
&= \frac{(a-b)I(M-bI)(M-cI)(a-c)I}{(a-b)^2(a-c)^2} \\
&= \frac{(M-bI)(M-cI)}{(a-b)(a-c)} = Q_a, \qquad \text{(S.17)} \\
Q_b^2 &= Q_b, \qquad \text{(S.18)} \\
Q_c^2 &= Q_c \qquad \text{(S.19)}
\end{aligned}
$$

も成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&Q_aQ_b = Q_bQ_a = 0, \quad Q_bQ_c = Q_cQ_b = 0, \\
&Q_cQ_a = Q_aQ_c = 0 \qquad \text{(S.20)}
\end{aligned}
$$

も容易に確かめられる．

$$
\begin{aligned}
&MQ_a = Q_aM = aQ_a, \qquad MQ_b = Q_bM = bQ_b, \\
&MQ_c = Q_cM = cQ_c \qquad \text{(S.21)}
\end{aligned}
$$

も確かめられる．これらより M のスペクトル分解

$$
M = MI = M(Q_a + Q_b + Q_c) = aQ_a + bQ_b + cQ_c \qquad \text{(S.22)}
$$

を得る．さらに $\lambda \neq a, b, c$ として

$$
M'_\lambda := \frac{1}{a-\lambda}Q_a + \frac{1}{b-\lambda}Q_b + \frac{1}{c-\lambda}Q_c \qquad \text{(S.23)}
$$

とおくと

$$
(M-\lambda I)M'_\lambda = I \qquad \text{(S.24)}
$$

となるので，$M'_\lambda = (M-\lambda I)^{-1}$ が (S.23) のとおり具体的に存在している．ゆえに M のスペクトル値は a, b, c 以外にはない．

長い話を書いたが，要するに

$$
\begin{aligned}
&(L-aI)(L-bI) = 0, \qquad \text{(S.25)} \\
&(M-aI)(M-bI)(M-cI) = 0 \qquad \text{(S.26)}
\end{aligned}
$$

のような式が成り立つなら L のスペクトル値は a, b であり，M のスペクトル値は a, b, c だと結論してよい．(S.25), (S.26) のように 0 になる非自明な多項式で次数が最低のものを**最小多項式** (minimal polynomial) という．

また，これは以下の議論では使わないことだが，次のような定理が成り立つ．変数 x の任意の多項式

$$
f(x) := \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n, \qquad \alpha_i \in \mathbb{C} \qquad \text{(S.27)}
$$

に対して

$$f(L) := \alpha_0 L^n + \alpha_1 L^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} L + \alpha_n I \tag{S.28}$$

と定める．多項式 $g(x)$ に対しても同様に $g(M)$ を定める．さらに

$$F(x) := f(a)P_a(x) + f(b)P_b(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}, \tag{S.29}$$

$$\begin{aligned} G(x) &:= g(a)Q_a(x) + g(b)Q_b(x) + g(c)Q_c(x) \\ &= g(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + g(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \\ &\quad + g(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned} \tag{S.30}$$

とおくと

$$f(L) = F(L), \tag{S.31}$$

$$g(M) = G(M) \tag{S.32}$$

が成り立つことがわかる．とくに $f(x) = x$, $g(x) = x$ とおくと，(S.31), (S.32) は (S.5), (S.22) を再現する．(S.29) は，関数 $f(x)$ の値 $f(a), f(b)$ が与えられたときに，$F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b)$ となる唯一の 1 次多項式 $F(x)$ を決める式になっている．同様に，(S.30) は，関数 $g(x)$ の値 $g(a), g(b), g(c)$ が与えられたときに，$G(a) = g(a)$, $G(b) = g(b)$, $G(c) = g(c)$ となる唯一の 2 次多項式 $G(x)$ を決める式になっている．$F(x)$ や $G(x)$ は**ラグランジュの補間多項式** (Lagrange's interpolating polynomial) とも呼ばれる．

2. 本稿の式 (2) の導出

物理量 X, Y, I が以下の関係を満たすとする：

$$X \neq \pm I, \tag{S.33}$$

$$Y \neq \pm I, \tag{S.34}$$

$$X \neq Y, \tag{S.35}$$

$$X^2 = I, \tag{S.36}$$

$$Y^2 = I, \tag{S.37}$$

$$YX = XY \tag{S.38}$$

ただし I は単位元．これらの元が生成する代数は可換代数である．このとき $X + Y$ のスペクトル値を求めたい．仮定より

$$\begin{aligned} (X+Y)^2 &= X^2 + XY + YX + Y^2 \\ &= I + 2XY + I \\ &= 2XY + 2I. \end{aligned} \tag{S.39}$$

両辺に $-4I$ を加えて

$$(X+Y)^2 - 4I = 2XY + 2I - 4I = 2XY - 2I = 2(XY - I). \tag{S.40}$$

両辺に $(X+Y)$ を掛けて

$$\begin{aligned}(X+Y)\{(X+Y)^2 - 4I\} &= 2(X+Y)(XY-I) \\ &= 2(X^2Y + XY^2 - X - Y) \\ &= 2(Y + X - X - Y) \ = \ 0 \end{aligned} \tag{S.41}$$

を得る．すなわち

$$\{(X+Y) - 0\}\{(X+Y) - 2I\}\{(X+Y) + 2I\} \ = \ 0. \tag{S.42}$$

これは本稿の式 (2) である．この式から $X+Y$ のスペクトル値は $0, 2, -2$ であることがわかる．

ちなみに (S.35) の $X \neq Y$ という仮定を $X = Y$ で置き換えると，(S.39) は

$$(X+Y)^2 = 2XY + 2I = 2X^2 + 2I = 2I + 2I = 4I \tag{S.43}$$

となり，これは

$$(X+Y)^2 - 4I \ = \ \{(X+Y) - 2I\}\{(X+Y) + 2I\} \ = \ 0 \tag{S.44}$$

を意味する．当然のことながら，$X + Y = 2X$ のスペクトル値は $2, -2$ だけである．何が言いたかったのかというと，(S.35) の $X \neq Y$ という仮定には意味があるということが言いたかったのである．

3. 本稿の式 (4) の導出

A, B, U, V は物理量として互いに等しくなく，関係式

$$A \neq \pm I, \qquad B \neq \pm I, \qquad U \neq \pm I, \qquad V \neq \pm I, \tag{S.45}$$

$$A^2 = I, \qquad B^2 = I, \qquad U^2 = I, \qquad V^2 = I, \tag{S.46}$$

$$UA = AU, \qquad VA = AV, \qquad UB = BU, \qquad VB = BV, \tag{S.47}$$

$$BA = AB, \qquad VU = UV \tag{S.48}$$

を満たすとする．ただし I は単位元．これらの元は可換代数を生成する．このとき

$$S := AU + AV + BU - BV \tag{S.49}$$

のスペクトル値を求めたい．仮定より

$$
\begin{aligned}
S^2 &= (AU)^2 + (AV)^2 + (BU)^2 + (BV)^2 \\
&\quad +2AUAV + 2AUBU - 2AUBV + 2AVBU - 2AVBV - 2BUBV \\
&= I + I + I + I \\
&\quad +2UV + 2AB - 2ABUV + 2ABUV - 2AB - 2UV \\
&= 4I
\end{aligned} \tag{S.50}
$$

ゆえに，$S^2 - 4I = 0$ すなわち

$$
(S - 2I)(S + 2I) = 0 \tag{S.51}
$$

を得る．これは本稿の式 (4) であり，この式から S のスペクトル値は ± 2 であることがわかる．

4. 本稿の式 (6) の導出

前提となる本稿 (5) 式の条件をもう一度書いておく．A, B, U, V は物理量として互いに異なり，仮定 (S.45)-(S.47) を満たし，(S.48) の代わりに

$$
BA = -AB, \qquad VU = -UV \tag{S.52}
$$

を満たすとする．このとき

$$
S := AU + AV + BU - BV = A(U + V) + B(U - V) \tag{S.53}
$$

のスペクトル値を求めたい．まず，仮定 (S.46), (S.52) より

$$
\begin{aligned}
(U + V)^2 &= U^2 + UV + VU + V^2 \\
&= I + UV - UV + I \\
&= 2I
\end{aligned} \tag{S.54}
$$

がわかる．ゆえに $U + V$ のスペクトル値は $\pm\sqrt{2}$ である．同様に

$$
\begin{aligned}
(U - V)^2 &= U^2 - UV - VU + V^2 \\
&= I - UV + UV + I \\
&= 2I
\end{aligned} \tag{S.55}
$$

もわかる．また，

$$
\begin{aligned}
(UV)^2 &= UVUV \\
&= -UVVU \\
&= -UU \\
&= -I
\end{aligned} \tag{S.56}
$$

を得る．この結果は，UV のスペクトル値は $\pm\sqrt{-1} = \pm i$（虚数！）であるこ

とを示している．同様に

$$(AB)^2 = -I \tag{S.57}$$

も得る．さらに (S.47) も用いると

$$\begin{aligned}(ABUV)^2 &= (AB)^2\,(UV)^2 \\ &= (-I)\times(-I) \\ &= I\end{aligned} \tag{S.58}$$

を得る．この式から $ABUV$ のスペクトル値は ± 1 であることがわかる．以上の結果を踏まえて (S.53) の S の 2 乗を計算すると，

$$\begin{aligned}S^2 &= A^2(U+V)^2 + AB(U+V)(U-V) \\ &\quad + BA(U-V)(U+V) + B^2(U-V)^2 \\ &= 2I + AB(U^2 - UV + VU - V^2) + BA(U^2 + UV - VU - V^2) + 2I \\ &= 2I + AB(I - UV - UV - I) - AB(I + UV + UV - I) + 2I \\ &= 4I - 4ABUV\end{aligned} \tag{S.59}$$

となる．これを

$$S^2 - 8I = -4I - 4ABUV \tag{S.60}$$

と書き換えてから両辺に S を掛け算すると

$$(S^2 - 8I)S = -4\,(I + ABUV)S \tag{S.61}$$

となるが，(S.47) と (S.52) に気をつけて $ABUVS$ を計算すると

$$\begin{aligned}ABUVS &= ABUV(AU + AV + BU - BV) \\ &= BV - BU - AV - AU \\ &= -S\end{aligned} \tag{S.62}$$

となるので，

$$(I + ABUV)S = S + ABUVS = S - S = 0 \tag{S.63}$$

となる．ゆえに (S.61) は

$$\bigl(S - \sqrt{8}I\bigr)\bigl(S + \sqrt{8}I\bigr)S = \bigl(S - 2\sqrt{2}I\bigr)\bigl(S + 2\sqrt{2}I\bigr)\bigl(S - 0\bigr) = 0 \tag{S.64}$$

となる．この式は本稿の式 (6) であり，S のスペクトル値が $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0$ であることを意味している．

5. 量子力学をよく知っている人向けのコメント

量子力学（非可換代数）の物理量 A や B は，パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と 2 次の単位行列 I_2 を使って，例えば

$$A = \sigma_z \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{S.65}$$

$$B = \sigma_x \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{S.66}$$

$$U = I_2 \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{S.67}$$

$$V = I_2 \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{S.68}$$

$$I = I_2 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{S.69}$$

と表現される．パウリ行列は，光子の偏光状態に関する物理量や，電子のスピンに関する物理量を表す．これらが仮定 (S.45)-(S.47) と (S.52) を満たすことは確かめられる．これらを S の定義式 (S.53) に代入すると，S の行列表現

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{S.70}$$

を得る．これの固有値を計算すれば $\pm 2\sqrt{2}, 0$ という値を得る．これが通常の量子力学の計算方法である．ポイントは，非可換代数の物理量 A, B, U, V は普通の数ではなく行列であり，物理量の積は行列の掛け算で表されるところである．

6. ウィグナーの論説と進化論

ウィグナーの講演論文 "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences" は書籍[5) で見られると私は本稿に書いたが，本稿を掲載した『数理科学』誌が出版された後，中西襄(のぼる)氏から，1960 年の学術誌 Communications on Pure and Applied Mathematics[6) に原論文が掲載されており中西氏による翻訳が 1961 年に『科学』誌に掲載されていることを教えていただいた．なお，中西襄氏による訳文の題名は「自然科学における数学の有効性について」となっており，Unreasonable にあたる訳語が見当たらないが，これは出版社編集部の判断でそうなったそうである．

改めてウィグナーの原論文と中西襄氏による翻訳を読んで思うことを述べる．ウィグナーは，論説中の「数学とは何か（What is Mathematics?)」という節で「Darwin の自然淘汰の過程によって，われわれの推理力が，その持つと思われる極致にまで到達したとはとうてい信じ難い．(it is hard to believe that our reasoning power was brought, by Darwin's process of natural selection, to the perfection which it seems to possess.)」と述べている．つまり，生物学的な進化によって人類の数理的推論能力がもたらされたとは信じられないとウィグナーは論じている．

一方，私は，生物学者ドーキンス[7) や歴史学者ハラリ[8)，哲学者戸田山の論[9) に便乗して，脳の情報処理・記憶・指令・発話・解釈・想像という能力も進化の産物であり，そういう能力がこの世界での人類の生存と繁栄に有利に働いたと本稿で論じた．また，我々のアイデアや文化や嗜好様式はミームという抽象的な遺伝子・自己複製子だと考えられるというドーキンスの説を借りて，数学や物理学もミーム群だと私は論じ[10)，自然科学がうまくいっているのは，それがこの世界に適応しているからであると私は主張した．つまり，ミームの段階も含めた生物学的な進化によって人類の数理的能力がもたらされたと私は考えている．

ウィグナーも私もダーウィン流の自然淘汰説を知りながら，正反対の結論に達しているのは興味深い不一致である．この点に関してウィグナーが間違っていて私だけが正しいとは，私は思わない．人類の数理的能力が生物学的進化の産物であることが，科学的に，疑いの余地なく証明されたわけではない．ただ，現代では，人類は他の生物と共通の祖先・共通の体のしくみを持つ生物種だという認識は普及しているし，分子生物学や集団遺伝学の発展によりミクロとマクロの両スケールでの発生と進化の基礎の理解が進んできている．また，人類以外の動物もいろいろな意味での知性を持っていることが知られるようになった．さらに，ミームという新種の増殖単位も認められるようになった．私はこれらの学問的進展の影響を受けて，生物学的な進化によって人類は数理的能力を授けられたと考えることに抵抗がなくなっているし，それ以外に考えようがないという気になっているのである．

念のために言うが，**生物進化論の安易な拡大解釈は危険である．** 数学や物理

学は自然淘汰の産物だという説は，仮説にすぎず，慎重な検証を要する．

7. 数学・物理学の成功は奇跡か？

もう少しウィグナーの論説[6]を検討したい．全体的にウィグナーの論説は，数学や物理学が自然現象を説明するという面でかくも成功しているのはまことに不思議だという論調で占められている．ウィグナーは，これらの成功を神秘と捉えているというよりは，なぜこの世界はこのように都合よくできているのかはわからないが好都合は謙虚に感謝すべきことだと捉えている．

論説[6]中の「物理学の理論における数学の役割（The Role of Mathematics in Physical Theories）」と題する節でウィグナーは「自然法則の定式化にあたって，物理学がある数学的概念を選ぶことは本当だし，数学的概念のうちわずかのものが物理学に用いられているにすぎないことも確かである．(It is true, of course, that physics chooses certain mathematical concepts for the formulation of the laws of nature, and surely only a fraction of all mathematical concepts is used in physics.)」と述べている．

私は本稿で「数学の一部分が自然界の規則性の記述にちょうどうまく当てはまり，それを使うとものごとが正確に予測できることがわかったので，みんながそれをまねして使うようになったのである」と述べた．数学全部が自然科学で使われるわけではないことを私も認め，さらに「みんながそれをまねした」というちょっと踏み込んだ一言を付け加えた．

また,「物理学の理論の成功はほんとうに驚くべきことなのか（Is the Success of Physical Theories Truly Surprising?)」という節でウィグナーは，ニュートンの重力の法則が百万分の一の精度で確かめられたこと，ヘリウム原子のエネルギー準位についての量子力学による計算値が実測値と千万分の一の精度で一致したこと，水素原子のエネルギー準位のわずかなシフトについての量子電磁気学による計算値がラムとクッシュが実測した値と千分の一の精度で一致したことなどの例を挙げたのち,「まだいくらでも例は挙げられるが，以上の三つの例は，自然法則を，とりあつかいやすいということで選ばれた概念で数学的に定式化することの，いかに適切であり正確であるかを説明していると思われる．‘自然法則’は厳格に限られた範囲内ではあるが，ほとんど考えられないような正確さをもっている．(The preceding three examples, which could be multiplied almost indefinitely, should illustrate the appropriateness and accuracy of the mathematical formulation of the laws of nature in terms of concepts chosen for their manipulability, the “laws of nature” being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope.)」と述べている.「物理学の理論の成功はほんとうに驚くべきことなのか」という節の見出しに対する答えはあからさまには書かれていないが，ウィグナーは物理理論の成功に素直に驚いているように見える．

たしかに，明瞭な数学的体裁の整った物理理論が自然現象を正確に予測する

という成功例は数多くあり，そういう正確な予測力が物理学の魅力であり有用性の源でもあることは間違いないと私も思う．しかし待てよと私は言いたい．数学的体裁は整っていたが現実の現象を予測・説明することに関して失敗した物理理論もあるし，逆に，体裁は不細工であったが，なかなかの成功をおさめた物理理論もある．

数学的ではあったが失敗に終わった物理理論の例として，**渦原子論** (vortex theory of atom) という理論を挙げておこう．これは，エーテルという流体が空間を満たしており，エーテルの渦が原子だと考える理論である[11,12]．1867 年にウィリアム・トムソン[13]（1892 年に爵位を得てケルヴィン卿となる）がそのような理論を提案して以来，19 世紀末まで渦原子論はかなり熱心に研究された．トムソンが最初に書いた論文にはたいした数式は書かれていないが，その後の研究では微分方程式を用いて渦のモデルが論じられている[14]．当時は，渦糸が結び目や絡み目になったものに対応して原子の種類や結合を説明できると考えられていた．さらには原子が吸収・放出する光のスペクトルもこの理論で説明できると考えられた[15]．この頃はエーテル理論の全盛期であり，電磁気・重力・光・原子などすべての物理現象・物理的存在様式はエーテル一元論で説明できると期待されていた．渦原子論はエーテル論の枝葉の一つであった．しかし，エーテルの存在（観測可能性）が 1887 年のマイケルソン・モーリーの実験で否定され，渦原子論の研究は次第に下火になった．流体中の渦が安定な構造を保つことも説明し難(がた)く，1905 年には W. トムソンも渦原子の安定性の証明をあきらめている[14]．

エーテル理論や渦原子論はそれなりに数学的体裁を装(よそお)った理論であったが，物理の理論としてはまったくの失敗であったと言えるだろう．ただ，物理と数学は切り離して考えることができるので，物理としては失敗であっても，数学的には正しい部分が残ることもある．例えば，エーテルの渦糸の結び目が原子であるなら結び目の分類は原子の分類と対応するはずだという考えに従って，テイトは結び目の分類表を初めて作成して 1885 年に発表したそうである（テイトの表には少し誤りもあったそうである）[15,16]．テイトらの研究は**結び目理論** (knot theory) と呼ばれる数学分野の契機になった．テイトが提起した数学上の問題は，後にテイト予想と呼ばれ，その予想は 1991 年に解決した[17]．

渦原子論には興味深い派生理論もある．原子はエーテルの渦だと考えるだけでなく，原子はエーテルの湧き出し口または吸い込み口だと考える理論を 1880 年代にピアソンという数学者が提案した[11]．吸い込み口に流れ込んだエーテルはどうやって湧き出し口に現れるのかとピアソンは考えて，エーテルは 3 次元空間とは別の空間を通過して再び 3 次元空間に現れるのだろうという説まで考えた．また，数学者クリフォードは，物質とエーテルの運動は空間の曲率変化であるという説を 1870 年に示唆していた[11]．このように，19 世紀後半には空間の幾何学と物質とを対応させるアイデアや超空間のアイデアは珍しくなかった．

その他にも科学史を紐(ひも)解いてみれば，物理理論の失敗例を見つけることは難しくない．むしろ成功例も失敗談も列挙する方が科学史として誠実であるし，

教訓的だし，面白いと思う.「相対論・量子論の出現以前の物理学が未熟で失敗もしたのは，当時の実験観測範囲が狭かったり数学的厳密性の要請が甘かったからしかたのないことで，そんな昔の失敗を引っ張り出すのは時代錯誤だ」と批判されるかもしれない．20 世紀以降の物理学にも失敗例は少なからずあるのだが，失敗であることをきちんと立証するには大変な労力を要するし，おおっぴらに失敗を指摘しても避けられるだけで，何の得にもならないから，おとなしい物理学者は静観しているのである．

以上では「数学的体裁を装っていたが，現実の現象を予測・説明することに関して失敗した（あるいは無用だった）物理理論」の例を挙げた.「体裁は不細工であったが，なかなかの成功をおさめた物理理論」の方は，詳しく説明しないが，少し例を挙げよう．本稿でも言及したが，ニュートンのオリジナルの力学は，微分方程式の体をなしておらず，作図で質点の軌道を決定するという体裁であり，汎用性に乏しかった[18)]．ボーアやゾンマーフェルトの量子論（量子力学が完成した後には「前期量子論」と呼ばれる）は，後から見れば量子力学の近似理論であり，解析力学に量子条件という仮説を付け加えた，その場しのぎ的な修正理論であったが，ゾンマーフェルトはこの理論をベースにして相対論的補正まで入れたごてごてした計算を行い，水素原子のスペクトルをかなり正確に求めていた[19)]．その計算結果は後のディラック方程式と同じ答えだった[20)]．量子力学の定式化の一つであるハイゼンベルク・ボルン・ヨルダンの行列力学は，行列の様式を守って計算していたら大変不便であったろうし，行列力学しかなかったら状態ベクトルの確率解釈も出遅れていたであろう．シュレーディンガーの波動力学とディラック，フォンノイマンなどによる抽象化を経て量子力学は真に使いやすいものになったし，物理的意味も見通せるものになったし，場の量子論への発展も可能になったと思われる．

話が長くなったが，数学的な物理理論の素晴らしい成功にウィグナーはいたく感心し，これは奇跡ではなかろうかというところまで行っているが，**それは華々しい成功例だけに目を奪われすぎでしょう**ということを私は言いたかったのである．現実には，大失敗もあったし，ほどほどの中途半端な成功もあったし，当初の目的に関しては失敗したけど副産物を得たというケースもあるのである．

成功したものだけが多くの子孫を残すことこそ自然淘汰の特性であり，結果的に目につくものは成功例ばかりになってしまい，奇跡が起こったかのように見えてしまうのである．

8. 進化は必ずしも改善を意味しない

生物進化論の拡大解釈は危険だと言っておきながら，もう一つ，進化論になぞらえて言っておきたいことがある．

ドーキンス[7)] は，**生物学的自然淘汰の対象は遺伝子であり，個体ではない**ことを強調した．各個体の生存にとって不利な特質でも，それが遺伝子のコピー

増殖に有利に働くならば，そのような特質が後の世代に引き継がれる．極端な例としては，働きバチは，自分では子供を産まないし，巣を守るために戦って命を落とすことも厭わないが，女王バチとその子の世話をすることにより，自分と類似性の高い遺伝子コピーを効率よく生産している．自分を働きバチにしてしまう遺伝子は，その個体の生存に有利に働いているとは思えないが，遺伝子の増殖には有利なのである．

また，自然淘汰には善悪の価値判断や，目的論的な計画性がないので，うっかりすると，進化の方向が生物個体の生存にとって不利なだけでなく，遺伝子の増殖にとってすら有利とは思えない方向に進むこともある．そのような例としては，クジャクのオスの羽がよく挙げられる．クジャクのオスの羽は大きくてきらびやかだが，大きすぎて動くのに不便だし，敵にも見つかりやすいし，大きくて美しい羽を形成して維持するにも栄養などのコストがかかる．解釈としては，そのような無駄に大きくて美しい羽を持っていられるオスは美しい羽という代償を払えるくらいに有利な別の特性を備えていると見てよく，メスはそのような優秀な生体を形作る遺伝子を持つオスと交配して，優秀な遺伝子を子に引き継ぎたいのだろうと考えられる．いったんオスが「大きくて美しい羽を作る」遺伝子を獲得し，メスが「大きくて美しい羽を持つオスとの交配を好む」遺伝子を獲得してしまうと，これら 2 種の遺伝子がともに手を取り合って淘汰を勝ち進んでしまい，クジャクがいまのような姿になった，と利己的遺伝子説は説明する．しかし本当に子孫繁栄を目的とするなら，こんな無駄の多いデザインをすることはなかったであろう．

この他にも，**自然淘汰・進化は必ずしも個体にとっての改善をもたらさない**という例はあるだろう．とくに，遺伝子の突然変異と自然淘汰のプロセスは非常に緩慢なので，環境が急変すると，以前は生存・増殖に有利だった特性が，環境変化後には不利な特性になってしまうことはあり得る．もちろん，その逆に，以前は生存・増殖にさして有利ではなかった特性が，環境変化後には俄然有利に働くこともあり得る．

遺伝子には，先を見通す能力がないし，将来の計画を立てて準備する能力もない．我々人間は，未来を構想して，現在した方がよいことを検討し選ぶ能力がある，と考えられている．ゆえに，人類の動向を生物進化になぞらえて考えることは当たっていないかもしれない．

しかし，学問分野のマクロな動向は，個々人の検討・選択によって動いていると言うよりは，抗いがたい潮流のように見えることもある．だからこそ，物理理論の失敗や放棄も起きるのだろう．すべての研究が計画通りによい方向に進むものなら，そのような無駄なことは起きなかったはずである．

研究分野の将来がいかなるものか予測することは，個人の先見能力よりも高次の能力を要するのかもしれない．我々は自分たちの遠い将来を見通せるほどには賢明ではないことを知る謙虚さを持つべきだと思う．

9. 謝辞

紙幅の都合上，数理科学誌掲載記事には書けなかった謝辞をここに記します．本稿の草稿を，細谷曉夫氏，筒井泉氏，杉尾一氏，谷村倖氏，古田彩氏，青木摂之氏に読んでいただき，有益なコメントをいただきました．皆様に感謝します．とくに杉尾一氏には科学哲学者の立場から議論していただきました．古田彩氏と青木摂之氏からは分子生物学の観点から適切な用語使用についてご助言をいただきました．中西襄(のぼる)氏から，ウィグナーの原論文が学術誌 Communications on Pure and Applied Mathematics[6] に掲載されていることと中西氏による翻訳が『科学』誌に掲載されていることを教えていただき，その上，翻訳記事の別刷までお送りいただきました．中西襄氏の親切に感謝します．もちろん本稿および補足解説の誤りは著者の責任に帰します．

参考文献

1) 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」，理系への数学（現代数学社）2010 年 5 月号から 2012 年 4 月号まで連載．代数的量子論の解説．とくに「第 5 回：スピン代数の GNS 表現と純粋状態・混合状態」2010 年 9 月号 pp.62–67,「第 6 回：ゲルファント・ナイマルクの双対性」2010 年 10 月号 pp.63–68,「第 8 回：ベルの不等式とミステリー姉妹」2010 年 12 月号 pp.59–65 を参照してほしい．

2) 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」，別冊日経サイエンス No.199『量子の逆説』pp.66–75 (2014). 補足記事がウェブにある：`http://www.nikkei-science.com/?p=37107`

3) T. Isobe, S. Tanimura, "A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test", Prog. Theor. Phys. **124**, 191–205 (2010). 量子力学に忠実な計算.

4) B. S. Cirel'son, "Quantum generalizations of Bell's inequality", Lett. Math. Phys. **4**, 93–100 (1980). C* 代数の方法で一般的な不等式を証明.

5) E. P. ウィグナー（岩崎洋一ほか訳）「自然科学において数学がおかしなほど有効であることについて」,『自然法則と不変性』ダイヤモンド社 (1974)，第 17 章に所収．原著は Eugene P. Wigner, Symmetries and Reflections, Indiana University Press (1967). `http://ch.nicovideo.jp/niconicoffee/blomaga/ar1125952` に日英対訳あり．

6) Eugene P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", Communications on Pure and Applied Mathematics XIII, 1–14 (1960). (中西襄 訳)「自然科学における数学の有効性について」科学（岩波書店）1961 年 9 月号，pp.450–457.

7) リチャード・ドーキンス（日高敏隆ほか訳）『利己的な遺伝子』紀伊國屋書店 (1991). 原著初版 1976 年.

8) ユヴァル・ノア・ハラリ（柴田裕之 訳）『サピエンス全史 上, 下』河出書房新社 (2016). 原著 2011 年.

9) 戸田山和久『科学哲学の冒険』NHK 出版 (2005). 戸田山和久『哲学入門』筑摩書房 (2014). 戸田山和久『恐怖の哲学』NHK 出版 (2016).

10) 谷村省吾「ミームとしての科学」，現代数学 2014 年 2 月号 p.3.

11) ヘリガ・カーオ（岡本拓司 監訳，有賀暢迪ら訳）『20 世紀物理学史 上巻』名古屋大学出版会 (2015)，第 1 章.

12) 武谷三男『量子力学の形成と論理 I—原子模型の形成』勁草書房 (1972)，2.2 節「原子のエーテル模型」

13) Lord Kelvin (Sir William Thomson), "On vortex atoms", Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. VI, 94–105 (1867). Reprinted in Phil. Mag. Vol. XXXIV, 15–24 (1867). URL: `https://zapatopi.net/kelvin/papers/` にケルヴィン卿（W. トムソン）の書きものを集めたライブラリがある．ただし論文を電子的に読み込んだ際に若干の読み誤りが生じているようなので注意が必要．例えば，"Kinetic theory of the dissipation of energy", `https://zapatopi.net/kelvin/papers/kinetic_theory.html`

の文末に書かれている数値 4012×10^3 は，原論文では 4012×10^9 と書かれている（論文レプリント集『Maxwell's Demon 2』を参照）.
14) E. T. ホイッテーカー（霜田光一，近藤都登 訳）『エーテルと電気の歴史 下』講談社 (1976). とくに pp.333–344 を参照.
15) History of knot theory, https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_knot_theory （2018 年 3 月 22 日閲覧）
16) 今井 淳「結び目の数学」日本数学会 2008 年秋季総合分科会・市民講演会 原稿. http://mathsoc.jp/publication/tushin/1303/1303imai.pdf （2018 年 3 月 22 日閲覧）
17) Tait conjectures, https://en.wikipedia.org/wiki/Tait_conjectures （2018 年 3 月 22 日閲覧）
18) 山本義隆『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』日本評論社 (1997).
19) ゾンマーフェルト（増田秀行 訳）『原子構造とスペクトル線 I 上下』講談社 (1973).
20) 菊池 健『原子物理学（増補版）』共立出版 (1979), p.157.

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報学研究科）