

# 数学・物理通信

10 卷 6 号      2020 年 9 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2020 年 9 月 3 日

# 目次 (Contents)

## 1. Radon 変換と CT スキャナー (3)

世戸憲治 2

## 2. モーリーの定理

武藤 徹 11

## 3. 『思想を織る』を読む

矢野 忠 29

## 4. 編集後記

矢野 忠 31

## 1. Radon Transform and CT Scanner (3)

Kenji SETO 2

## 2. Morley's Trisector Theorems

Tohru MUTO 11

## 3. Reading "Weaving Thought"

Tadashi YANO 29

## 4. Editorial Comments

Tadashi YANO 31

# Radon 変換と CT スキャナー (3)

世戸 憲治\*

## Radon Transform and CT Scanner(3)

Kenji SETO\*

### 1 はじめに

前々回の論文「Radon 変換と CT スキャナー (1)」(「数学・物理通信」10 巻 3 号)では, CT スキャナーの数学的原理となっている 2 次元空間での Radon 変換について述べた. また, 前回の「Radon 変換と CT スキャナー (2)」(「数学・物理通信」10 巻 4 号)では, 次元を一つ上げた 3 次元空間での Radon 変換について述べた. 今回はこの次元数を一般化して  $n$  次元空間における Radon 変換について述べる. ここまでくると CT スキャナーとの関係はなくなってしまうかもしれないが, 数学的には興味ある話題となるはずである.

### 2 Radon 変換の導入とその逆変換

#### 2.1 Radon 変換

一般化された  $n$  次元空間  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  で定義された関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  があるものとし, この  $n$  次元空間内におけるすべての  $(n-1)$  次元平面上での関数の積分値から元の関数が再現できるかという問題を考える\*<sup>1</sup>. ただし, この関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は原点から十分に遠いところでは, すみやかにゼロになるものとする.

ここで,  $n$  次元空間における極座標を導入しておく\*<sup>2</sup>. デカルト座標  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  と極座標  $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  の関係は

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta_1 \\x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\&\vdots \\x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}\end{aligned}\tag{2.1}$$

\* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

\*<sup>1</sup> ここでは,  $(n-1)$  次元平面という言葉を使うが, これは, ここだけの造語である.  $n=2$  のときは直線,  $n=3$  のときは平面,  $n=4$  のときは立体を, 一般次元に拡張したものとして使うことにする.

\*<sup>2</sup> これに関しては, 矢野忠氏が書かれた「 $n$  次元の球の体積」(数学・物理通信)に述べられている. これは 7 巻 3 号から 7 巻 6 号まで 4 回のシリーズ物で載っているが, 特に,  $n$  次元空間の極座標については 7 巻 5 号に詳しく述べられているので参照されたい.

となる。ここに、各変数の範囲は

$$0 \leq r, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi \quad (2.2)$$

である。また、 $n$ 次元積分において、デカルト座標から極座標に変換したときの Jacobian  $J_n$  は

$$J_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sin^{n-1-i} \theta_i \quad (2.3)$$

となるので、 $n$ 次元多重積分要素は

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = J_n dr \prod_{i=1}^{n-1} d\theta_i = r^{n-1} dr \prod_{i=1}^{n-1} (\sin^{n-1-i} \theta_i) d\theta_i \quad (2.4)$$

となる。

いま、この空間内のある  $(n-1)$ 次元平面を考え、原点からこの平面に下ろした垂線の長さを  $s$  とし、この垂線方向の単位ベクトルを、極座標での角度を用いて、

$$\mathbf{e} = (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}) \quad (2.5)$$

としておく。このとき、この平面の方程式は、原点から平面上の任意の点までのベクトルを  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  としたとき、 $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{e}$  の内積が  $s$ ,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = s, \quad \text{すなわち,} \quad x_1 \cos \theta_1 + x_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cdots + x_n \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} = s \quad (2.6)$$

と記述される。これから、この平面は  $n$ 個のパラメータ  $s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$  を用いて表わされることになる。ただし、ここでは、これらパラメータの範囲を、(2.2)式とは違って、

$$-\infty < s < \infty, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1} \leq \pi \quad (2.7)$$

としておく。通常の場合、 $0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi$  であるが、ここでは、 $\theta_{n-1}$  の範囲が  $0$  から  $\pi$  になっていることに注意する。そのかわり、 $s$  の範囲が  $-\infty$  から  $\infty$  となって全空間をカバーしている。このように、 $s$  の範囲を正負にとるのは、後で使う Fourier 変換のときに便利になるようにするためである。

ここで、関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を、この平面上で積分したものを

$$g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.8)$$

と定義する。この積分領域  $D$  は関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  のすべてのゼロでない部分に渡る。また、 $\delta$  は Dirac のデルタ関数とする。この  $g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  を関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の  $n$ 次元 Radon 変換と呼ぶ。問題は、この Radon 変換した  $g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  を既知として、これから元の関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を再現することである。

## 2.2 Radon 変換の逆変換

ここでは、Fourier 変換を使った方法を展開する。 $g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  を変数  $s$  について Fourier 変換したものを  $G(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  とすると、

$$G(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) e^{-i\rho s} ds, \\ \text{逆は,} \quad g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) e^{i\rho s} d\rho \quad (2.9)$$

となる。また、 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を  $n$  個の変数について Fourier 変換したものを  $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  とすると、

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r})} dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

$$\text{逆は, } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) e^{i(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\xi})} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \quad (2.10)$$

となる。ここで、指数関数のところにある  $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\xi}$  は、ベクトル  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  とベクトル  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  の内積である。

つぎに、(2.9) の第 1 式に、 $g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  の定義式 (2.8) を代入すると、 $s$  積分が実行されて、

$$G(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-i\rho \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.11)$$

となる。ここで、(2.10) の第 1 式とこの式を比べると、この式の右辺は、 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の Fourier 変換で書いて、

$$G(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = (2\pi)^{(n-1)/2} F(\rho \mathbf{e}) \quad (2.12)$$

となることが分かる。この式、右辺の関数  $F$  中にある  $\mathbf{e}$  は (2.5) 式で定義するものである。これで、関数  $g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  と関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の Fourier 変換同士が結び付いたことになる。

ここで、(2.10) の第 2 式に戻って、積分変数  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  を、 $\boldsymbol{\xi} = \rho \mathbf{e}$  と極表示すると、この式は、(2.4) 式を用いて、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\rho|^{n-1} d\rho F(\rho \mathbf{e}) e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})} \quad (2.13)$$

となる。ここで、 $\rho^{n-1}$  のところの  $\rho$  に絶対値が付くのは、極座標で表わしたときの体積要素を正にするためである。この式右辺の  $F$  に (2.12) 式を代入して、 $G$  で表すと、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{(2n-1)/2}} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\rho|^{n-1} d\rho G(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})} \quad (2.14)$$

となり、さらに、(2.9) の第 1 式を代入して、 $G$  を  $g$  で表すと、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\rho|^{n-1} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)} \quad (2.15)$$

となる。この式の  $\rho$  積分は実行可能で、この部分だけを取り出すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho|^{n-1} d\rho e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)} = 2 \int_0^{\infty} \rho^{n-1} d\rho \cos[\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)] \quad (2.16)$$

となるが、この先は、 $n$  の偶奇性を分けて、

$$\rho^{n-1} \cos[\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)] = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cos[\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)], & n = \text{odd} \\ (-1)^{n/2} \sin[\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)], & n = \text{even} \end{cases} \quad (2.17)$$

となることを使うと, (2.16) 式の  $\rho$  積分が実行されて,

$$(2.16) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \pi \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s), & n = \text{odd} \\ (-1)^{n/2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)^{-1}, & n = \text{even} \end{cases} \quad (2.18)$$

となる. ここで, 超関数の公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin(Mx)}{\pi x} = \delta(x), \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos(Mx)}{x} = 0 \quad (2.19)$$

を用いた. この結果を, (2.15) 式に代入し,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{2}{(2\pi)^n} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \pi \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s), & n = \text{odd} \\ (-1)^{n/2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)^{-1}, & n = \text{even} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

となるが, ここで,  $s$  積分について  $n-1$  回部分積分をすると,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{2(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \right] \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \pi \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s), & n = \text{odd} \\ (-1)^{n/2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)^{-1}, & n = \text{even} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる. この式で  $n = \text{odd}$  の場合は, デルタ関数があるおかげで,  $s$  積分も実行され,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{n-1}} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \right]_{s=\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}} \quad (2.22)$$

となり,  $n = \text{even}$  の場合は  $s$  積分はそのまま残るが, もう一度, 書き直すと,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{-2(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \\ &\times \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

と求められる. ここで P は積分の主値をとることを意味する. 以上で, Radon 変換の逆変換が求められたことになるが, 次元  $n$  の偶奇性で解の形が異なることは興味ぶかい.

### 3 簡単な具体例

ここで, 具体例として,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が  $n$  次元の原点を中心とする Gauss 分布

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 e^{-a^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (3.1)$$

という場合を考えてみる. ここで,  $f_0$  は関数  $f$  の次元を持つ定数,  $a$  は長さの逆数の次元を持つ定数である. この場合の Radon 変換を求めるため, この  $f$  を (2.8) 式に代入すると,

$$g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = f_0 \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.2)$$

となる．この積分を実行するには，積分変数  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を原点周りに回転させ  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  とし，座標  $u_1$  を，初めに設定した  $n-1$  次元平面に，原点から下ろした垂線方向に設定する．すなわち，

$$u_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} \quad (3.3)$$

となるようにしておく．このとき，新しい座標はもとのものを原点周りに回転しただけなので，原点からの距離は変わらずに，

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \quad (3.4)$$

となる．この変換で，(3.2) 式の Radon 変換  $g$  は，

$$\begin{aligned} g(s, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) &= f_0 \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)} \delta(u_1 - s) du_1 du_2 \dots du_n \\ &= f_0 e^{-a^2 s^2} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(u_2^2 + \dots + u_n^2)} du_2 \dots du_n = f_0 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)^{n-1} e^{-a^2 s^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

と求められる．これを前節で求めた逆変換の式 (2.22) あるいは，(2.23) に代入して元に戻ることを確かめてみる．

### 3.1 $n = \text{odd}$ の場合

まず， $n$  を奇数として (2.22) 式を用いた場合は，そのまま代入すると，

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{n-1}} f_0 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i\right) \left[ \left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1} e^{-a^2 s^2} \right]_{s=\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}} \quad (3.6)$$

となる．ここで，この  $s$  で微分するところは，「数学公式 I」(岩波全書) P.34 にある  $e^{cx^2}$  の  $n$  階微分公式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{cx^2} = \left[ \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n! c^{n-k}}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k} \right] e^{cx^2}$$

を用いると，

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1} e^{-a^2 s^2} = \left[ \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(n-1)! (-a^2)^{n-1-k}}{k! (n-1-2k)!} (2s)^{n-1-2k} \right] e^{-a^2 s^2} \quad (3.7)$$

と和の形で求められる．この和の上限にある  $[\ ]$  は Gauss 記号であるが，いまは  $n = \text{奇数}$  なので， $(n-1)$  は偶数となり，これは 2 で割り切れるので，Gauss 記号は付けなくともよい．

この式の  $s$  に (2.6) 式に表れる

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = x_1 \cos \theta_1 + x_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \dots + x_n \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \quad (3.8)$$

を代入することになる．しかし，このまま計算しようとするとう大変面倒なことになってしまう．ここでは，より簡便な方法をとることにする．結果の式は球対称性があるので，原点からの距離  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  のみの関数になるはずである．そこで，点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を回転させ，点  $(r, 0, 0, \dots, 0)$  となるようにしてお

く. この操作で,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r \cos \theta_1$  となるので, (3.6) 式は,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{n-1}} f_0 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{a} \right)^{n-1} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \\ \times \left[ \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(n-1)! (-a^2)^{n-1-k}}{k! (n-1-2k)!} (2r \cos \theta_1)^{n-1-2k} \right] e^{-a^2 (r \cos \theta_1)^2} \quad (3.9)$$

となり, 残るは, 角度  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$  の積分となる. このうち,  $\theta_2$  から  $\theta_{n-1}$  までの積分は後の方に依存性がないので簡単に実行されるが,  $\theta_1$  の積分は後の方に複雑に依存してくるので簡単ではない.

ここで, 前回の復習から始めると, 前回は  $n = 3$  次元だったので, この式は

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_0}{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 [1 - 2a^2 r^2 \cos^2 \theta_1] e^{-a^2 r^2 \cos^2 \theta_1} \quad (3.10)$$

となり, ここで,  $\theta_2$  積分を実行し,  $\theta_1$  については  $\cos \theta_1 = t$  と変数変換をすると,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_0}{2} \int_{-1}^1 dt [1 - 2a^2 r^2 t^2] e^{-a^2 r^2 t^2} = \frac{f_0}{2} \left[ t e^{-a^2 r^2 t^2} \right]_{-1}^1 = f_0 e^{-a^2 r^2} \quad (3.11)$$

となって, 元の (3.1) 式に戻る.

この調子で,  $n = 5$  次元の場合を実行すると, (3.9) 式は,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = \frac{f_0}{(2\pi)^4} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{a} \right)^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin \theta_3 d\theta_3 \int_0^\pi d\theta_4 \\ \times 4a^4 \left( 4a^4 r^4 \cos^4 \theta_1 - 12a^2 r^2 \cos^2 \theta_1 + 3 \right) e^{-a^2 r^2 \cos^2 \theta_1} \quad (3.12)$$

となり, ここで,  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$  の積分は実行し,  $\theta_1$  に関しては,  $\cos \theta_1 = t$  と変数変換すると,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = \frac{f_0}{4} \int_{-1}^1 dt \left( 4a^4 r^4 t^4 - 12a^2 r^2 t^2 + 3 - 4a^4 r^4 t^6 + 12a^2 r^2 t^4 - 3t^2 \right) e^{-a^2 r^2 t^2} \\ = \frac{f_0}{4} \left[ \left( 3t - (2a^2 r^2 + 1)t^3 + 2a^2 r^2 t^5 \right) e^{-a^2 r^2 t^2} \right]_{-1}^1 = f_0 e^{-a^2 r^2} \quad (3.13)$$

となって, 元の (3.1) 式に戻る. この調子で  $n$  の値を  $n = 7, 9, \dots$  と上げていくことはできるであろうが, いまのところ, 一般の奇数  $n$  に対する結果がでていないので, ここまでで終わりとする.

### 3.2 $n = \text{even}$ の場合

つぎに,  $n$  が偶数の場合は, (2.23) 式に (3.5) 式の  $g$  を代入すると,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{-2(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n} f_0 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{a} \right)^{n-1} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \theta_i d\theta_i \right) \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(d/ds)^{n-1} e^{-a^2 s^2}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s} \quad (3.14)$$

となる. ここに表れる積分も, 一般の  $n$  について実行するのは大変難しいことになるので, ここでは, 前々回に扱った  $n = 2$  の場合と, 今回実行する  $n = 4$  の場合のみに限定する. まず,  $n = 2$  の場合, この式は

$$f(x_1, x_2) = -\frac{af_0}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} s ds e^{-a^2 s^2} \mathbf{P} \int_0^\pi \frac{d\theta_1}{r \cos \theta_1 - s} \quad (3.15)$$

となる。ここで、(3.9) 式のところで説明したように、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r \cos \theta_1$  とおいた。この積分は前々回説明したように「数学公式 I」(岩波全書) P.247 にある公式

$$\text{P} \int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos x} dx = \begin{cases} \pi/\sqrt{a^2 - b^2}, & a > |b| \\ 0, & |a| < |b| \end{cases} \quad (3.16)$$

を用いて実行される。結果は、

$$f(x_1, x_2) = f_0 e^{-a^2 r^2} \quad (3.17)$$

となって、(3.1) 式が再現される。

つぎに、 $n = 4$  の場合を実行してみよう。このとき、(3.14) 式は、

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{af_0}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds (3s - 2a^2 s^3) e^{-a^2 s^2} \text{P} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta_1}{r \cos \theta_1 - s} d\theta_1 \quad (3.18)$$

となる。ここで、 $\theta_2, \theta_3$  積分はすでに実行した。この  $\theta_1$  積分については、同じ公式集の同じページにある公式

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x} dx = \frac{\pi a}{b^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right), \quad |a| \geq |b| \quad (3.19)$$

を利用する。しかし、この公式集には、 $|a| < |b|$  の主値をとる場合が書かれていない。ここでは、まったくの希望的観測で、このときの積分が

$$\text{P} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x} dx = \frac{\pi a}{b^2}, \quad |a| < |b| \quad (3.20)$$

になるものとする、すべてがうまくいくことが分かった。ただし、この式は後で証明することができたので、この証明を、以下の「付録」に掲載する。

これら (3.19) (3.20) 式を用いると (3.18) 式は

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{2af_0}{\sqrt{\pi} r^2} \left[ \int_0^\infty ds (3s^2 - 2a^2 s^4) e^{-a^2 s^2} - \int_r^\infty ds (3s - 2a^2 s^3) \sqrt{s^2 - r^2} e^{-a^2 s^2} \right] \quad (3.21)$$

となる。この 1 項目の積分は

$$\int_0^\infty ds (3s^2 - 2a^2 s^4) e^{-a^2 s^2} = \left[ s^3 e^{-a^2 s^2} \right]_0^\infty = 0 \quad (3.22)$$

と実行され、2 項目の積分は  $\sqrt{s^2 - r^2} = t$  と変数変換をすると、

$$\begin{aligned} - \int_r^\infty ds (3s - 2a^2 s^3) \sqrt{s^2 - r^2} e^{-a^2 s^2} &= -e^{-a^2 r^2} \int_0^\infty dt \left( (3t^2 - 2a^2 t^4) - 2a^2 r^2 t^2 \right) e^{-a^2 t^2} \\ &= 2a^2 r^2 e^{-a^2 r^2} \int_0^\infty dt t^2 e^{-a^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi} r^2}{2a} e^{-a^2 r^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。ここで、変換後の小括弧中の積分は  $s$  を  $t$  とした (3.22) 式を用いた。また、この式最後の積分は同じ公式集 P.233 の最初の式

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^2(2n+1)}} \quad (3.24)$$

を用いた。これで、(3.21) 式の  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  は

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_0 e^{-a^2 r^2} \quad (3.25)$$

となって、元の (3.1) 式に戻ることができる。この調子で、 $n = 6, 8, \dots$  といきたいところだが、だんだん計算が面倒になるので、ここで終わりとする。

## 4 おわりに

今回は、Radon 変換について次元数  $n$  を一般化した場合を考えてみた。この一般化された次元で逆変換の式を作ってみたが、前にも触れたように、 $n$  が偶数か奇数でその形が変わってくるのは大変興味あることである。

前節では具体例として、元の関数が Gauss 分布の場合の Radon 変換とその逆変換を求め、元の関数に戻るかを確かめてみた。しかし、逆変換の方に表れる積分はかなり面倒なものになってしまい、ここでは次元数  $n = 5$  までを求め、元の関数に戻ることを証明した。この具体例で、一般次元の逆変換がきれいな形で求められなかったことは大変心残りであり、次回以降の問題として残しておく。

## 5 付録: (3.20) 式について

$n = 4$  の場合にでてくる (3.20) の積分式であるが、これは初め、辻褃合わせとして、考えた出したものである。その後、自分が持ち合わせているすべての公式集をながめてみたが、この式は載っていない。最終手段として、数式処理ソフト Maxima でやってみた。積分式を入力すると、「 $b^2 - a^2$  は正か負か、またはゼロか」と聞いてくるので正と答え、その後すぐに  $a, b$  でできた大変長たらしい式がでてきて、これがまた「正か負かゼロか」と聞いてくるので適当に正と答え、さらに、同じような式の正負を聞いてくるので、また、正と答えると、その積分の解として  $\pi a/b^2$  という答えがでてくる。と言う訳で、Maxima をどの程度信用してよいのか迷うところだが、この式はまったく根拠のない式という訳ではなさそうである。

そこで、以下、この (3.20) 式の真偽性を確かめてみよう。この式でパラメータ  $a, b$  を

$$\frac{b}{a} = \gamma \quad (\text{A1})$$

とおくと、

$$P \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \gamma \cos x} dx = \frac{\pi}{\gamma^2}, \quad |\gamma| > 1 \quad (\text{A2})$$

と、1 パラメータの式となる。この式で積分変数を  $x$  から  $t$  に、

$$\tan(x/2) = t \quad (\text{A.3})$$

と変換すると、

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \quad (\text{A.4})$$

となるので、この積分式は

$$P \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^2 [1 - (ct)^2]} = \frac{\gamma + 1}{8\gamma^2} \pi, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (\text{A.5})$$

となる。ただし、この左辺に含まれる  $c$  はこの第 2 式で定義する。この被積分関数は有理式なので、部分分数に、

$$\frac{t^2}{(1 + t^2)^2 [1 - (ct)^2]} = \frac{1}{c^2 + 1} \left[ \frac{1}{(c^2 + 1)(t^2 + 1)} - \frac{1}{(t^2 + 1)^2} + \frac{c^2}{2(c^2 + 1)} \left( \frac{1}{ct + 1} - \frac{1}{ct - 1} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

と展開すると積分ができ、この不定積分は、

$$\int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^2 [1 - (ct)^2]} = \frac{1}{c^2 + 1} \left[ \frac{\arctan t}{c^2 + 1} - \frac{t}{2(t^2 + 1)} - \frac{1}{2} \arctan t + \frac{c}{2(c^2 + 1)} (\log(ct + 1) - \log|ct - 1|) \right] \quad (\text{A.7})$$

と求められる。これを 0 から  $\infty$  までの定積分にするときは、積分の主値をとるためこの最後の項の積分範囲は、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{(1-\epsilon)/c} + \int_{(1+\epsilon)/c}^{\infty} \right] \quad (\text{A.8})$$

とする。ここで、 $t = (1 \pm \epsilon)/c$  における積分値はうまく相殺され、結果として、

$$\text{P} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2 [1-(ct)^2]} = \frac{1}{c^2+1} \left[ \frac{\pi}{2(c^2+1)} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\gamma+1}{8\gamma^2} \pi \quad (\text{A.9})$$

となって (A.5) 式の正しいことが確かめられる。

# モーリーの定理

武藤 徹<sup>1</sup>

## Morley's Trisector Theorem

Tohru MUTO<sup>2</sup>

### まえおき

武藤 徹先生から何回にもわたってモーリーの定理の関係の文書を送っていただいた。順序不同だが、そのタイトルを挙げて見ると

1. 内角のモーリーの定理
2. 内角のモーリーの定理（新証明）ショート版
3. 内角のモーリーの定理（新証明）完全版
4. 外角のモーリーの定理（新証明）
5. 矢野さん、山崎さんへ返書

をいただいていた。しかし、編集者が平面幾何学が得意でないことと、これらの文書にある図を描くことができなかつたために長い間失礼をして、「数学・物理通信」に掲載することができなかつた<sup>3</sup>。

最近になって tikz で図がかなり描けるようになったので、いままでいただいた原稿をまとめたものを掲載できないかと考えた。これらの文書ファイルはすべて 2014 年のものでまことに申し訳ない。それで「内角のモーリーの定理」と「外角のモーリーの定理」の証明を掲載する。「はじめに」は 5 の武藤先生の原稿をそのまま載せる。

付録は編集者がつけた。付録にはインターネットのサイトで調べたモーリーの定理の証明を武藤先生の証明の解説をかねて付け加えてある。これはなかなか編集者には武藤先生の証明を理解できなかつたからである。いや、いまでもきちんと理解できているかどうかはあやしい。さらに、証明の手段とか変形 3 倍角の公式とかについても述べた。余計なことだとは思うが、なんらかの参考になればよいと思う。

経過をここに記して武藤先生の論文の掲載が遅れた、お詫びとする<sup>4</sup>。（編集者（矢野））

## 1 はじめに

Frank Morley (1860-1937) は、イギリス生まれのイギリスの数学者ですが、ほとんどの生涯をアメリカで過ごし、ボルティモア市のジョンズ・ホピキンス大学の教授でした。

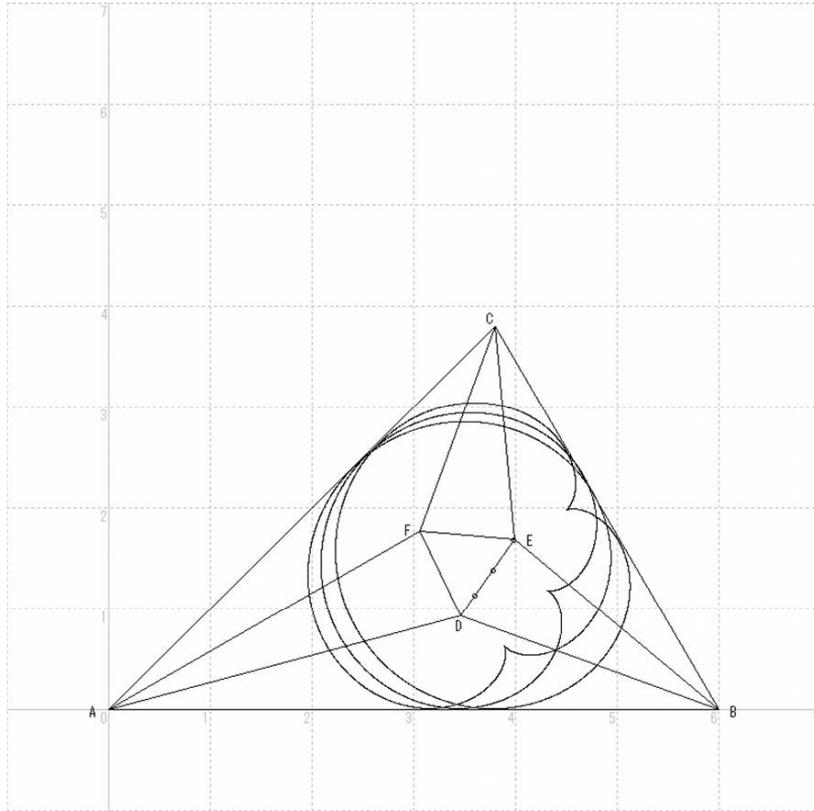
彼は定三角形に内接する心臓形 (cardioid) の中心の軌跡が正三角形になること、また、その頂点が内角の 3 等分線の交点であることを発見しました (1899) (図 1 参照)。「三角形の内角の 3 等分線のうち、辺に近いもの同士の間は、正三角形を形作る」という定理を、モーリーの定理といいます。私は、5 年ほど前、正弦定

<sup>1</sup> 数学思想研究者

<sup>2</sup> mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

<sup>3</sup> 編集者は高校で平面幾何を学ばなかつた世代に属している。それで物理学に必要な最低限の幾何学を大学時代に自習した。

<sup>4</sup> 実際にはまったく「数学・物理通信」への掲載は実現しなかつたのだが、この論文の古い草稿には 2014.5.10 の日付が入っていた。



3個作ると、中心が、見事に1直線に並びます。  
 頂点の時は、4点で接します。

図 1: Cardioid とモーリーの定理

理を用いて証明しましたが、かなり厄介でした。今年、やはり正弦定理を用いて、和積定理、差積定理を用いると、対称式に帰着することを発見し、ずっと簡単に証明できました。2010年に上梓した『新しい数学の教科書』 [1] では、中学生にもわかる証明を載せましたが、かなり技巧的でした。

今年になって、5年前の証明を発展させて、中学生にもわかる新証明にたどり着くことができました。

## 2 モーリー定理

### 2.1 モーリー定理

$\triangle ABC$  において、 $\angle ACB/3 = C, \angle CAB/3 = A, \angle CBA/3 = B$  とする。  $\angle DAB = A, \angle DBA = B$  となる点を  $D$ ,  $\angle EBC = B, \angle ECB = C$  となる点を  $E$ ,  $\angle FCA = C, \angle FAC = A$  となる点を  $F$  とすれば、 $\triangle DEF$  は正三角形である (図2参照)。

### 2.2 証明1

図2の  $D, E, F, P, Q, R$  は  $\triangle ABC$  の内角の3等分線の交点である。このとき、 $\triangle DEF$  が正三角形となる、というのが、モーリーの定理である。モーリーの定理の証明は複雑であるが、少しだけ簡単な証明を見つけたのでこの2.2節で述べる。 $\triangle ABC$  の外接円の直径を  $R$  とし、内角を  $3A, 3B, 3C$  とすると  $\triangle ABC$  において、正

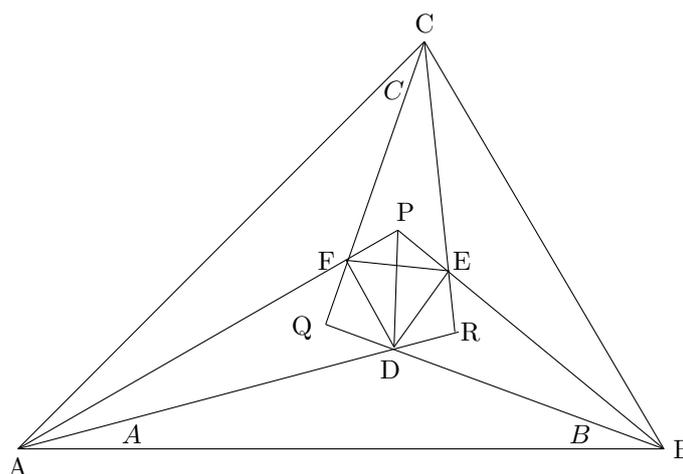


図 2: モーリーの定理の説明図 1

弦定理から

$$AB = R \sin 3C \tag{2.1}$$

$$BC = R \sin 3A \tag{2.2}$$

$$AC = R \sin 3B \tag{2.3}$$

が成り立つ。また  $\triangle PAB$  において、

$$\angle APD = \angle BPD \tag{2.4}$$

が成り立つ。

さらに、 $\triangle PAB$  と  $\triangle FCA$  に正弦定理を用いれば

$$AP = \frac{AB \sin 2B}{\sin 2(A+B)} = \frac{R \sin 3C \sin 2B}{\sin 2(A+B)} \quad (2.5)$$

$$AF = \frac{AC \sin C}{\sin(A+C)} = \frac{R \sin 3B \sin C}{\sin(A+C)} \quad (2.6)$$

が成り立つ。  
したがって

$$\begin{aligned} PF &= AP - AF \\ &= \frac{R \sin 3C \sin 2B}{\sin 2(A+B)} - \frac{R \sin 3B \sin C}{\sin(A+C)} \\ &= \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{\cos(A+B)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

途中の計算の詳細は 2.2 節の末尾の補遺 1 示す。

ところで PE は PF において、A と B を交換したものであるが、PF は A と B に対して対称式であるから

$$PE = PF \quad (2.8)$$

が成り立つ。

$\triangle PED$  と  $\triangle PFD$  において、

$$PE = PF \quad (2.8)$$

$$PD \text{ は共通} \quad (2.9)$$

$$\angle EPD = \angle FPD \quad (2.10)$$

であるから、 $\triangle PED \equiv \triangle PFD$  となる。

したがって

$$DE = DF \quad (2.11)$$

が成り立つ。

同様にして

$$DE = EF \quad (2.12)$$

も成り立つので

$$DE = DF = EF \quad (2.13)$$

が証明される。これから三角形  $\triangle DEF$  は正三角形であることが証明された。

### (補遺 1 (2.7) の計算)

(2.7) の計算には変形 3 倍角の公式

$$\sin 3A = 4 \sin A \sin(\pi/3 + A) \sin(\pi/3 - A) \quad (A)$$

が使われる。この公式の導出は付録 4 に述べる。ここではこれを認めて使う。

まずは

$$AP = \frac{R \sin 3C \sin 2B}{\sin 2(A+B)} \quad (2.14)$$

$$AF = \frac{R \sin 3B \sin C}{\sin(A+C)} \quad (2.15)$$

から出発する. これらの式に変形 3 倍角の公式を使えば, AP は

$$\begin{aligned}
 AP &= \frac{4R \sin C \sin(\pi/3 + C) \sin(\pi/3 - C) \sin 2B}{2 \sin(A + B) \cos(A + B)} \\
 &= \frac{2R \sin C \sin(\pi/3 + C) \sin 2B}{\cos(A + B)} \\
 &= \frac{4R \sin C \sin(\pi/3 + C) \sin B \cos B}{\cos(A + B)}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

となり, AF は

$$\begin{aligned}
 AF &= \frac{4R \sin B \sin(\pi/3 + B) \sin(\pi/3 - B) \sin C}{\sin(\pi/3 - B)} \\
 &= 4R \sin B \sin(\pi/3 + B) \sin C
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる.

したがって,  $PF = AP - AF$  は

$$\begin{aligned}
 PF &= AP - AF \\
 &= \frac{4R \sin C \sin(\pi/3 + C) \sin B \cos B}{\cos(A + B)} - 4R \sin B \sin(\pi/3 + B) \sin C \\
 &= \frac{2R \sin B \sin C}{\cos(A + B)} (S - T), \quad S, T \text{ は (2.18), (2.19) で定義される} \\
 &= \frac{2R \sin B \sin C}{\cos(A + B)} (S - T) \\
 &= \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{\cos(A + B)}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7) の中の第 3 行目の式の  $S - T$  の中の計算はつぎのようである.

$$\begin{aligned}
 S &:= 2 \sin(\pi/3 + C) \cos B \\
 &= \sin(\pi/3 + B + C) + \sin(\pi/3 + C - B)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
 T &:= 2 \sin(\pi/3 + B) \cos(A + B) \\
 &= \sin(\pi/3 + A + 2B) + \sin(\pi/3 - A)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 S - T &= \sin(\pi/3 + B + C) + \sin(\pi/3 + C - B) - \sin(\pi/3 + A + 2B) - \sin(\pi/3 - A) \\
 &= \sin(2\pi/3 - A) + \sin(\pi/3 + C - B) - \sin(2\pi/3 + B - C) - \sin(\pi/3 - A) \\
 &= \sin(2\pi/3 - A) - \sin(\pi/3 - A) \\
 &= 2 \cos(\pi/2 - A) \sin(\pi/6) \\
 &= 2 \sin A \sin(\pi/6) \\
 &= \sin A
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

(2.20) の上から 2 行目で第 2 項と第 3 項とが打ち消すことはつぎのようにしてわかる.

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi/3 + C - B) - \sin(2\pi/3 + B - C) &= \sin(\pi/3 + C - B) - \sin(\pi - \pi/3 + B - C) \\
 &= \sin(\pi/3 + C - B) - \sin[\pi - (\pi/3 + C - B)] \\
 &= \sin(\pi/3 + C - B) - \sin(\pi/3 + C - B) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

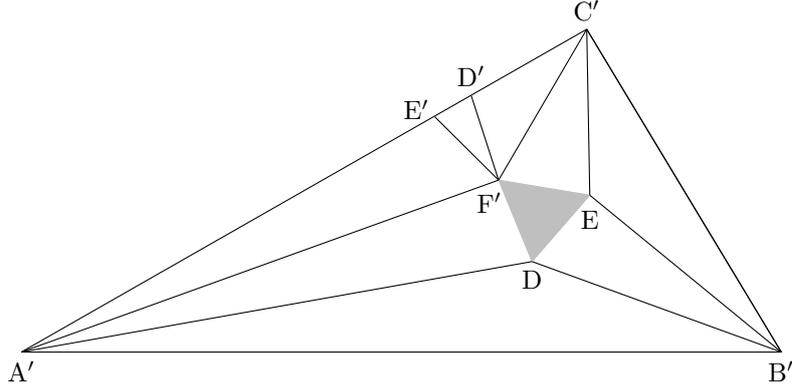


図 3: モーリーの定理の説明図 2

### 2.3 証明 2

図 3 を見てほしい。正三角形  $DEF'$  をつくり、 $\angle C'EF' = \pi/3 + B, \angle C'F'E = \pi/3 + A$  となる点  $C'$  をとる。同様に  $\angle A'DF' = \pi/3 + B, \angle A'F'D = \pi/3 + C$  となる点を  $A'$  とし、 $\angle B'DE = \pi/3 + A, \angle B'ED = \pi/3 + C$  となる点を  $B'$  とする<sup>5</sup>。

このとき  $\angle F'C'E = C, \angle F'A'D = A, \angle DB'E = B$  である。

$A'F'$  に関する  $D$  の対称点を  $D'$ 、 $C'F'$  に関する  $E$  の対称点を  $E'$  とする。点  $F'$  のまわりの角を考えると

$$\pi/3 + 2\angle A'F'D + 2\angle C'F'E = 2\pi + \angle D'F'E' \quad (2.21)$$

が成り立つ。左辺では  $\angle D'F'E'$  を 2 回重複して加えていることに注意する。

ここで  $\angle A'F'D = \pi/3 + C, \angle C'F'E = \pi/3 + A$  であるから

$$\begin{aligned} \angle D'F'E' &= \pi/3 + 2(\pi/3 + C) + 2(\pi/3 + A) - 2\pi \\ &= 2(C + A) - \pi/3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

と求まる。

$F'D' = F'D, F'E' = F'E, F'D = F'E$  であるから  $\triangle D'F'E'$  は二等辺三角形である。

したがって、(2.22) を用いると

$$\begin{aligned} \angle E'D'F' &= \angle D'E'F' \\ &= \frac{1}{2}(\pi - \angle D'F'E') \\ &= \frac{1}{2}[\pi - 2(C + A) + \pi/3] \\ &= \pi/3 + B \end{aligned} \quad (2.23)$$

ところで

$$\triangle A'DF' \equiv \triangle A'D'F' \quad (2.24)$$

であるから

$$\angle A'D'F' = \angle A'DF' = \pi/3 + B \quad (2.25)$$

が成り立つ。

<sup>5</sup>ここに述べた 6 つの角度の関係の導出を 2.2 節の末尾の補遺で述べる。

したがって

$$\angle E'D'F' = \angle A'D'F' \quad (2.26)$$

となる。すなわち、 $A', E', D'$  は共線である。

同様に、 $C', E', D'$  も共線である。すなわち、 $C', A', E', D'$  は共線である。

また、 $\triangle C'F'E' \equiv \triangle C'F'E$  であるから

$$\angle A'C'F' = \angle F'C'E \quad (2.27)$$

が成り立つ。

同様に

$$\angle A'C'F' = \angle F'C'E = \angle EC'B' \quad (2.28)$$

同様な議論から

$$\angle C'A'F' = \angle F'A'D = \angle DA'B' \quad (2.29)$$

と

$$\angle A'B'D = \angle DB'E = \angle EB'C' \quad (2.30)$$

と成り立つ。

ここであらためて  $A'$  を  $A$ ,  $B'$  を  $B$ ,  $C'$  を  $C$  おきかえれば、 $F'$  は  $F$  と重なり、 $\triangle DEF$  は正三角形となる。

(補遺 2  $\angle A'DF' = B + \pi/3$  等の証明)

6つの式がある。それらをまず並べておこう。

$$\angle A'DF' = \pi/3 + B$$

$$\angle A'F'D = \pi/3 + C$$

$$\angle B'DE = \pi/3 + A$$

$$\angle B'ED = \pi/3 + C$$

$$\angle C'EF' = \pi/3 + B$$

$$\angle C'F'E = \pi/3 + A$$

証明は6つとも同様であるので、 $\angle A'DF' = \pi/3 + B$  と  $\angle A'F'D = \pi/3 + C$  を証明する。

以下では図3ではなく、図2にもとづいて証明を述べる。また各点について'はすべて除いて表す。

まず  $\angle ADF = B + \pi/3$  を証明しよう。

図2の三角形  $\triangle ADF$  の角  $\angle ADF$  の大きさを求めたい。すでに

$$\angle DPE = \angle DPF \quad (2.31)$$

が成り立つことがわかっている。それに  $\angle PDF = \pi/6$  であるようにとったから、三角形  $PAD$  の一つの角  $\angle ADP$  がわかれば、 $\angle ADF = \angle ADP - \angle PDF$  から求めることができる。これで証明の方針が立ったので、あとは具体的にそれぞれの角の大きさを求めていけばよい。

三角形  $PAB$  において  $\angle APB$  は

$$\angle APB = \pi - 2(A + B) \quad (2.32)$$

である。 $\angle DPA = \angle DPB$  であるから、(2.32) を2でわって

$$\angle DPA = \pi/2 - (A + B) \quad (2.33)$$

となる.  $\angle ADP + A + \angle DPA = \pi$  であるから

$$\begin{aligned}\angle ADP &= \pi - A - \angle DPA \\ &= \pi - A - [\pi/2 - (A + B)] \\ &= \pi/2 + B\end{aligned}\tag{2.34}$$

また  $\angle ADP = \angle ADF + \angle PDF$  であるから

$$\begin{aligned}\angle ADF &= \angle ADP - \angle PDF \\ &= \pi/2 + B - \pi/6 \\ &= \pi/3 + B\end{aligned}\tag{2.35}$$

つぎに  $\angle AFD = C + \pi/3$  を証明しよう.

そのために  $\angle ADF = B + \pi/3$  であることを用いよう.

$$\begin{aligned}\angle AFD &= \pi - A - \angle ADF \\ &= \pi - A - (B + \pi/3) \\ &= \pi/3 + C\end{aligned}\tag{2.36}$$

ここで  $A + B + C = \pi/3$  であることを用いた.

### 3 外角のモーリーの定理

2節では内角のモーリーの定理の証明について述べた. しかし, 実は三角形の外角の3等分線の中で三角形の辺に近い3等分線の3つの交点 P, Q, R を直線で結ぶとこの三角形 PQR は正三角形になっているという定理が成り立っている. これを外角に関するモーリーの定理という (図4参照).

#### 3.1 証明1

図4において見られるように三角形 ABC の外角は各三角形の頂点 A, B, C に対して2つつ, 合計6つある. 三角形のある外角の大きさはその隣の内角を除いた三角形の内角の和に等しいから, その外角の大きさはそれぞれ

$$\angle BAY = \angle CAX = 3(B + C)\tag{3.1}$$

$$\angle ABY' = \angle CBX' = 3(A + C)\tag{3.2}$$

$$\angle BCY'' = \angle ACX'' = 3(A + B)\tag{3.3}$$

である. したがって, (3.1), (3.2), (3.3) で与えられる外角の3等分線でできる角は

$$\angle PAB = \angle RAC = \pi/3 - A\tag{3.4}$$

$$\angle PBA = \angle QBC = \pi/3 - B\tag{3.5}$$

$$\angle RCA = \angle QCB = \pi/3 - C\tag{3.6}$$

となる.

AD, AF と RP との交点を S, T とすれば,

$$\angle CEB = \pi - (B + C) = 2\pi/3 + A\tag{3.7}$$

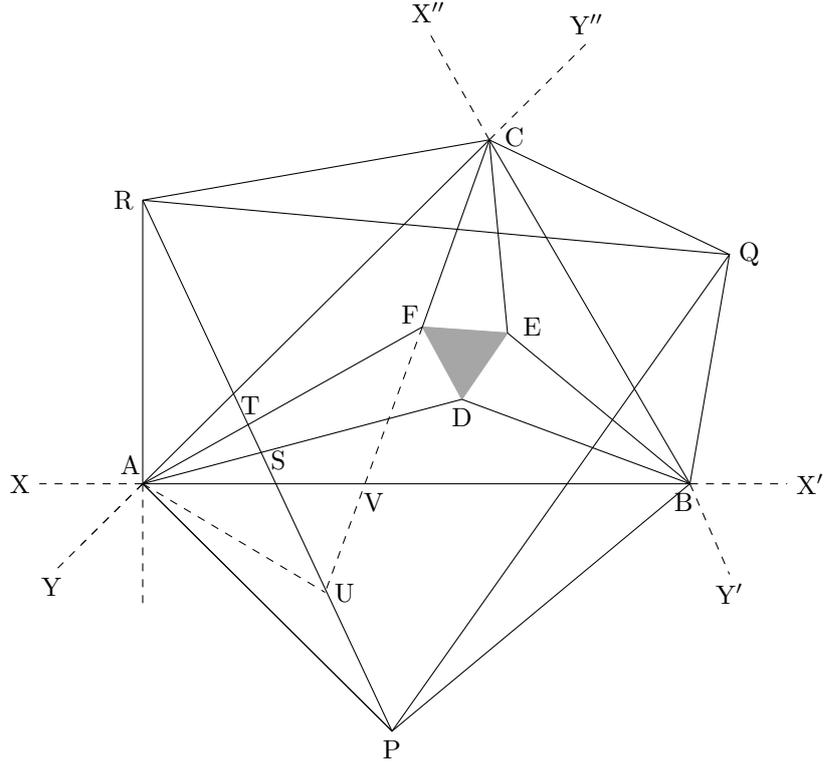


図 4: 外角のモーリーの定理の説明図

であり,

$$\angle RAP = (\pi/3 - A) + 3A + (\pi/3 - A) = 2\pi/3 + A \quad (3.8)$$

であるから,

$$\angle RAP = \angle CEB \quad (3.9)$$

が成り立つ. また補遺 3 で証明するように

$$\frac{AR}{AP} = \frac{EC}{EB} \quad (3.10)$$

が成り立つ.

(3.9) と (3.10) から  $\triangle EBC$  と  $\triangle APR$  とは相似三角形である. したがって,

$$\angle ARP = \angle ECB = C \quad (3.11)$$

と

$$\angle ARP = \angle ACF = C \quad (3.12)$$

が成り立つ.

$\triangle AST$  と  $\triangle ADF$  において,  $\angle FAD$  は共通であり,  $\angle ADF = \pi/3 + B$  である. 一方, (3.4) を用いれば,

$$\begin{aligned} \angle AST &= \angle ASR \\ &= \pi - [(\pi/3 - A) + 2A] - C \\ &= \pi/3 + B \end{aligned} \quad (3.13)$$

であるから, (2.25) から

$$\angle AST = \angle ADF \quad (3.14)$$

であるから、したがって

$$RP \parallel FD \quad (3.15)$$

である.

同様にして

$$PQ \parallel DE \quad (3.16)$$

$$RQ \parallel FE \quad (3.17)$$

したがって

$$\triangle PQR \sim \triangle DEF \quad (3.18)$$

すわなち、 $\triangle PQR$  と  $\triangle DEF$  とは相似三角形である. すでに  $\triangle DEF$  は正三角形であることが証明されているから、 $\triangle PQR$  も正三角形である.

(注)  $CF$  の延長と  $PR$  との交点を  $U$  とすれば、 $\angle ARP = \angle ARU = \angle ACU = C$  であるから、これらの角は弦  $AU$  上に立つ円周角とみなされる. したがって点  $A, U, C, R$  は共円である. したがって

$$\angle RCU + \angle RAU = \pi \quad (3.19)$$

が成り立つ. また

$$\angle ARC + \angle AUC = \pi \quad (3.20)$$

も成り立つ.

### (補遺 3 (3.10) の導出)

はじめに  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすれば、

$$\begin{aligned} AC &= R \sin 3B \\ &= 4R \sin B \sin(\pi/3 + B) \sin(\pi/3 - B) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} AB &= R \sin 3C \\ &= 4R \sin C \sin(\pi/3 + C) \sin(\pi/3 - C) \end{aligned} \quad (2.1)$$

が成り立っている.

$\triangle RAC$  において (3.4) と (3.6) を用いれば、

$$\frac{AR}{\sin(\pi/3 - C)} = \frac{AC}{\sin(2\pi/3 - B)} \quad (3.21)$$

が成り立つ.

(3.21) から

$$AR = AC \frac{\sin(\pi/3 - C)}{\sin(2\pi/3 - B)} \quad (3.22)$$

となる.

$\triangle PAB$  において (3.4) と (3.5) とを用いれば、

$$\frac{AP}{\sin(\pi/3 - B)} = \frac{AB}{\sin(2\pi/3 - C)} \quad (3.23)$$

が成り立つ.

(3.23) から

$$AP = AB \frac{\sin(\pi/3 - B)}{\sin(2\pi/3 - C)} \quad (3.24)$$

となる.

(3.22), (3.24) から

$$AR = 4R \sin B \sin(\pi/3 - B) \sin(\pi/3 - C) \quad (3.25)$$

$$AP = 4R \sin C \sin(\pi/3 - B) \sin(\pi/3 - C) \quad (3.26)$$

であるから

$$\frac{AR}{AP} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad (3.27)$$

が得られる. (3.25) と (3.26) を導くときに, (2.3) と (2.1) を用いた.

一方,

$$\frac{EC}{\sin B} = \frac{EB}{\sin C} \quad (3.28)$$

であるから

$$\frac{EC}{EB} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad (3.29)$$

となり, (3.27), (3.29) から

$$\frac{AR}{AP} = \frac{EC}{EB} \quad (3.10)$$

が導出される.

## 3.2 証明 2

外角のモーリーの定理のもう一つの証明を述べる (図 4 参照). 三角形  $\triangle ABC$  の外角とその 3 等分された角については証明 1 に述べられたことがそのまま成り立つのでこの証明 2 ではくりかえさない.

証明の方針としては三角形  $\triangle DAB$  と三角形  $\triangle CRQ$  が相似三角形であることを示し, 三角形  $PQR$  の一辺の長さ  $RQ$  を表す式を求める.

$\triangle ABC$  の外接円の直径を  $R$  とすれば,

$$AC = R \sin 3B \quad (2.3)$$

$$BC = R \sin 3A \quad (2.2)$$

である.

$\triangle RAC$  において, (3.4) と (3.6) から

$$\frac{CR}{\sin(\pi/3 - A)} = \frac{AC}{\sin(2\pi/3 - B)} \quad (3.30)$$

$\sin(2\pi/3 - B) = \sin(\pi/3 + B)$  と (2.3) を用いれば,

$$\begin{aligned} CR &= AC \frac{\sin(\pi/3 - A)}{\sin(\pi/3 + B)} \\ &= 4R \sin B \sin(\pi/3 - A) \sin(\pi/3 - B) \end{aligned} \quad (3.31)$$

となる. また  $\triangle QCB$  において, (3.5) と (3.6) とを用いれば,

$$\frac{CQ}{\sin(\pi/3 - B)} = \frac{BC}{\sin(2\pi/3 - A)} \quad (3.32)$$

$\sin(2\pi/3 - A) = \sin(\pi/3 + A)$  と (2.2) とを用いれば,

$$\begin{aligned} CQ &= BC \frac{\sin(\pi/3 - B)}{\sin(\pi/3 + A)} \\ &= 4R \sin A \sin(\pi/3 - A) \sin(\pi/3 - B) \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。したがって

$$\frac{CR}{CQ} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{DA}{DB} \quad (3.34)$$

が成り立つ。

また、補遺 4 に示すように

$$\angle RCQ = \angle ADB \quad (3.35)$$

も成り立つ。

したがって、(3.34) と (3.35) とから

$$\triangle CRQ \sim \triangle DAB \quad (3.36)$$

であることが証明されたから、 $\triangle CRQ$  の  $RQ$  の長さを求める。

まず

$$\angle CRQ = A \quad (3.37)$$

$$\angle CQR = B \quad (3.38)$$

であり、

$$\frac{RQ}{\sin(\pi/3 - C)} = \frac{CR}{\sin B} \quad (3.39)$$

である。

したがって、 $CR$  は (3.31) で与えられるから

$$\begin{aligned} RQ &= CR \frac{\sin(\pi/3 - C)}{\sin B} \\ &= 4R \sin(\pi/3 - A) \sin(\pi/3 - B) \sin(\pi/3 - C) \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる。 $RQ$  は  $A, B, C$  について対称な式であるから、 $PQ, RP$  も同じ式で表される。

したがって、

$$PQ = RQ = RP = 4R \sin(\pi/3 - A) \sin(\pi/3 - B) \sin(\pi/3 - C) \quad (3.41)$$

が成り立つ。これから

$$\triangle PQR \text{ は正三角形}$$

である。

#### (補遺 4 (3.35) の導出)

図 3 で  $\angle RCQ$  は

$$\begin{aligned} \angle RCQ &= \angle RCA + 3C + \angle QCB \\ &= \angle(\pi/3 - C) + 3C + (\pi/3 - C) \\ &= 2\pi/3 + C \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる。また  $\angle ADB$  は

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \pi - (A + B) \\ &= 2\pi/3 + C \end{aligned} \quad (3.43)$$

したがって、(3.42) と (3.43) とから (3.35) が導出できる。

## 4 おわりに

モーリーの定理の証明のしかたはいくつもあるので、一つ二つの証明を述べても十分ではないが、参考にしたい。その証明は 150 を越える。その中には著名な数学者の証明も含まれている。

外角のモーリーの定理は内角のモーリーの定理ほど知られていないので、その証明はめずらしいかもしれない。

## 5 付録

### 5.1 付録 1 モーリーの定理の証明の手段

つぎの 3 つの手段が考えられる [2].

1. 初等幾何学的な証明：図形的な性質のみで証明する
2. 三角関数を用いる証明
3. 解析幾何学的証明：座標またはベクトルを用いる

第 3 の解析幾何学的方法はあまり役立たないと思われるが、第 1 と第 2 の方法は使えそうである。付録 2 では比較的わかりやすい三角関数を使う方法で証明をする。

### 5.2 付録 2 モーリーの定理の証明 3

図 2 に示したように三角形の内角の 3 等分線の交点を  $D, E, F$  と表すと  $\triangle DEF$  は正三角形となる。これがモーリーの定理である。この付録 2 の証明は [3] の証明を編集者が書き換えたものである。記号は武藤先生の証明の図 2 と同一となるように変更した。

$\triangle DEF$  が正三角形となることを証明するためにはこの三角形の 3 つの辺の長さが等しいことを示すか、または内角がそれぞれ  $\pi/3$  に等しいことを示せばよい。

三辺の長さが等しいことを示す方針で定理を証明する。そのために図 2 の  $\triangle BED$  に着目する。正弦法則から辺の長さ  $BD$  と  $BE$  が求まれば、 $\triangle DEF$  の 1 辺の長さ  $DE$  を余弦定理から求めることができる。この方針でモーリーの定理を証明しよう。

普通には  $\triangle ABC$  の頂点  $A$  の角を  $A$  と表すのが慣例であるが、わざとその 3 倍の  $3A$  という風に表す。したがって 3 等分された角を  $A$  と表す。同様に頂点  $B, C$  の 3 等分された角を  $B, C$  と表す。これは後の証明に出てくる式を少しだけ簡明にするためである。

$3A, 3B, 3C$  は  $\triangle ABC$  の内角であるから

$$3A + 3B + 3C = \pi \quad (5.1)$$

である。ここで  $\pi$  は角度を弧度法のラジアンで表したもので、これを度で表せば  $\pi = 180^\circ$  である。したがって

$$A + B + C = \frac{\pi}{3} \quad (5.2)$$

が成り立つ。

$\triangle ABC$  の外接円の直径を  $R$  とすれば、3 辺の長さは正弦定理から

$$AB = c = R \sin 3C \quad (2.1)$$

$$BC = a = R \sin 3A \quad (2.2)$$

$$AC = b = R \sin 3B \quad (2.3)$$

である.

△EBC に正弦定理を用いれば

$$\frac{BE}{\sin C} = \frac{BC}{\sin(\pi - B - C)} \quad (5.3)$$

が得られる.

(2.2) を (5.3) に用いれば

$$\begin{aligned} BE &= R \sin 3A \frac{\sin C}{\sin(\pi - B - C)} \\ &= R \sin 3A \frac{\sin C}{\sin(\pi/3 - A)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで,  $\sin(\pi - B - C) = \sin(B + C)$  および  $A + B + C = \pi/3$  であることを用いた.  
 $\sin 3A$  に変形 3 倍角の公式<sup>6</sup>

$$\sin 3A = 4 \sin A \sin(\pi/3 + A) \sin(\pi/3 - A) \quad (A)$$

を用いれば

$$BE = 4R \sin A \sin C \sin(\pi/3 + A) \quad (5.5)$$

が得られる.

同様に △DAB に正弦定理を用いれば,

$$BD = 4R \sin A \sin C \sin(\pi/3 + C) \quad (5.6)$$

が得られる.

△BED に余弦定理を用いれば

$$DE^2 = BE^2 + BD^2 - 2(BD)(BE) \cos B \quad (5.7)$$

であるから

$$DE^2 = (4R)^2 \sin^2 A \sin^2 C [\sin^2(\pi/3 + A) + \sin^2(\pi/3 + C) - 2 \sin(\pi/3 + A) \sin(\pi/3 + C) \cos B] \quad (5.8)$$

ところで

$$\sin^2 B = \sin^2(\pi/3 + A) + \sin^2(\pi/3 + C) - 2 \sin(\pi/3 + A) \sin(\pi/3 + C) \cos B \quad (5.9)$$

が成り立つので<sup>7</sup>,

$$DE^2 = (4R)^2 \sin^2 A \sin^2 C \sin^2 B \quad (5.10)$$

が得られる.

すなわち

$$DE = 4R \sin A \sin B \sin C \quad (5.11)$$

となる. この式は角  $A, B, C$  について対称式であるから, 同様にして

$$DF = 4R \sin B \sin A \sin C, \quad (5.12)$$

$$EF = 4R \sin A \sin C \sin B \quad (5.13)$$

が得られる. したがって

$$DE = DF = EF \quad (5.14)$$

となる.

したがって △DEF の 3 辺が等しいから, △DEF は正三角形である.

<sup>6</sup>付録 4 に証明を述べる.

<sup>7</sup>(5.9) の証明は付録 5 に述べる.

### 5.3 付録3 モーリーの定理の証明 4

この証明は英語のウィキペディアの証明 [4] をもとに編集者が書き換えたものである。図5の記号等は武藤先生の証明の図2の記号に置き換え、また角度は弧度法に書き換えてある。

三角恒等式

$$\sin 3A = 4 \sin A \sin(\pi/3 + A) \sin(2\pi/3 + A) \quad (\text{B})$$

を用いたモーリー定理の導出を示す。(B)は(A)とちょっとみかけがちがうが、(A)と(B)とは同一である。このことは付録4の末尾に示す。

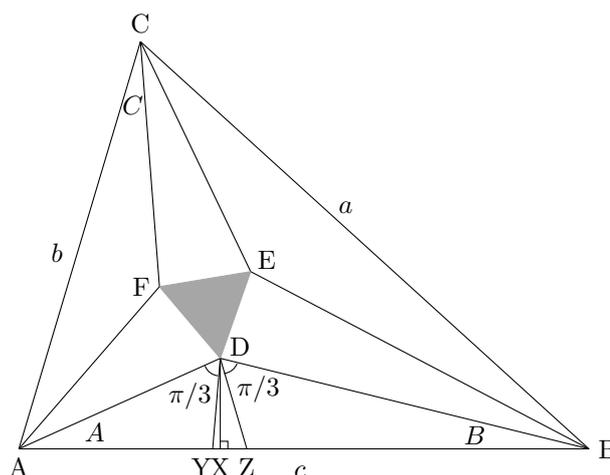


図5: モーリーの定理の説明図3

証明を始める前にその考えのあらすじを述べておこう。図5の中の三角形DEFが正三角形であることを示したい。そのためには直接に三角形の三辺の長さ、または、3つの角が等しいことがいえればよい。

この証明では三角形 $\triangle DEF$ の3つの角の大きさ

$$\angle FDE = \angle DEF = \angle EFD \quad (5.15)$$

を示すことを考える。そう考えて、 $\triangle CFE$ とそれに相似な三角形をつくることを考える。それが三角形 $\triangle DYZ$ である。これはまだ相似な三角形であることは示されていないが、すくなくとも $\angle YDZ = C$ が成り立ちそうである。

この見通しはどうしてたつのか。もともと三角形 $\triangle DAB$ の角 $\angle ADB = \pi - (A+B)$ であるから $A+B+C = \pi/3$ を用いると $\angle ADB = 2\pi/3 + C$ であるので、図5のようにDYとDZをとれば、 $\angle YDZ = C$ が成り立つことが予想される。

実際に考えてみれば、 $\angle DYZ = \pi/3 + A$ 、 $\angle DZY = \pi/3 + B$ であるから

$$\angle YDZ + \angle DYZ + \angle DZY = \pi \quad (5.16)$$

から、 $\angle YDZ = C$ が導かれる。あとは $\triangle CFE$ と $\triangle DYZ$ が相似三角形であることを実際に示せばよい。

証明の方針としては、たとえば、点Fのまわりの角で三角形 $\triangle DEF$ の内角 $\angle DFE$ を除いてわかると未知の角、 $\triangle DEF$ の一つの内角が求まる。同様に点D、Eのまわりの角について三角形 $\triangle DEF$ の内角を除いてきめられるから、三角形 $\triangle DEF$ の内角が求められる。

証明の方針についての説明が長くなった。具体的に証明にとりかかろう。

点X、Y、Zは線分BC上の図5に示された点である。 $\triangle ABC$ において、 $3A + 3B + 3C = \pi$ が成り立つ。すなわち、 $A + B + C = \pi/3$ が成り立つ。

図 5 の  $\triangle DAB$  において

$$\angle DZY = \pi/3 + B \quad (5.17)$$

$$\angle DYZ = \pi/3 + A \quad (5.18)$$

$$\angle YDZ = C \quad (5.19)$$

である.  $\triangle DYZ$  において

$$\sin(\pi/3 + A) = \frac{DX}{DY} \quad (5.20)$$

$$\sin(\pi/3 + B) = \frac{DX}{DZ} \quad (5.21)$$

$\triangle FCA$  と  $\triangle EBC$  において

$$\angle AFC = \pi - (A + C) = 2\pi/3 + B \quad (5.22)$$

$$\angle BEC = \pi - (B + C) = 2\pi/3 + A \quad (5.23)$$

であるから  $\triangle FCA$  と  $\triangle EBC$  とに正弦定理を用いれば,

$$\sin(2\pi/3 + B) = \frac{b}{CF} \sin A \quad (5.24)$$

$$\sin(2\pi/3 + A) = \frac{a}{CE} \sin B \quad (5.25)$$

が求められる.

$\triangle ABC$  の頂点  $C$  から, 底辺  $AB$  に下ろした垂線の長さ  $h$  を 2 通りの方法で表す.

$$\begin{aligned} h &= b \sin 3A \\ &= b \cdot 4 \sin A \sin(\pi/3 + A) \sin(2\pi/3 + A) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} h &= a \sin 3B \\ &= a \cdot 4 \sin B \sin(\pi/3 + B) \sin(2\pi/3 + B) \end{aligned} \quad (5.27)$$

と表される.

(5.21),(5.24) を (5.27) に代入すれば

$$h = 4ab \sin A \sin B \frac{DX}{DZ} \frac{1}{CF} \quad (5.28)$$

また, (5.20),(5.25) を (5.26) に代入すれば

$$h = 4ab \sin A \sin B \frac{DX}{DY} \frac{1}{CE} \quad (5.29)$$

(5.28),(5.29) の分母は等しいから

$$DY \cdot CE = DZ \cdot CF \quad (5.30)$$

$$\frac{DY}{DZ} = \frac{CF}{CE} \quad (5.31)$$

が成り立つ.

$\triangle DYZ$  と  $\triangle CFE$  において,  $\angle YDZ$  と  $\angle FCE$  とは同じ角  $C$  であり, それぞれの三角形をつくる対応した辺の比は (5.31) によって等しいから, 2 つの三角形  $\triangle DYZ$  と  $\triangle CFE$  は相似である.

したがって, 対応した角  $\angle DZY$  と  $\angle CEF$  とは等しく

$$\angle DZY = \angle CEF = \pi/3 + B \quad (5.32)$$

である。また対応した角  $\angle DYZ$  と  $\angle CFE$  とは等しく

$$\angle DYZ = \angle CFE = \pi/3 + A \quad (5.33)$$

である。

同様の議論は、三角形  $\triangle ADF$  と  $\triangle BED$  についても成り立つ。特に必要なのは角  $\angle AFD = \pi/3 + C$  の関係である<sup>8</sup>。また (5.22) が成り立つから、図 2 から F 点のまわりの角度の関係

$$\angle CFE + \angle AFC + \angle AFD + \angle DFE = 2\pi \quad (5.34)$$

が成り立つ。ここで (5.33), (5.22) と  $\angle AFD = \pi/3 + C$  を用いれば、

$$\begin{aligned} (\pi/3 + A) + (2\pi/3 + B) + (\pi/3 + C) + \angle DFE &= 2\pi \\ 4\pi/3 + A + B + C + \angle DFE &= 2\pi \\ \angle DFE &= (2 - 5/3)\pi \end{aligned} \quad (5.35)$$

が成り立つ。したがって

$$\angle DFE = \pi/3 \quad (5.36)$$

であることがわかる。

同様にして、 $\triangle DEF$  のあと 2 つの角  $\angle FDE$  も  $\angle DEF$  も  $\pi/3$  であることもわかる。したがって、

$$\angle DFE = \angle FDE = \angle DEF = \pi/3 \quad (5.37)$$

が成り立つ。したがって  $\triangle DEF$  は正三角形であることが示された。

## 5.4 付録 4 変形 3 倍角の公式の導出

$$\sin 3A = 4 \sin A \sin(\pi/3 + A) \sin(\pi/3 - A) \quad (A)$$

の導出を述べよう [3].

$$\begin{aligned} \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ &= 4 \sin A \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \sin^2 A \right] \\ &= 4 \sin A (\sin^2 \pi/3 - \sin^2 A) \\ &= 4 \sin A (\sin \pi/3 + \sin A) (\sin \pi/3 - \sin A) \\ &= 4 \sin A \times 2 \sin \left( \frac{\pi/3 + A}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi/3 - A}{2} \right) \times 2 \sin \left( \frac{\pi/3 - A}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi/3 + A}{2} \right) \\ &= 4 \sin A \sin(\pi/3 + A) \sin(\pi/3 - A) \end{aligned}$$

これで変形 3 倍角の公式 (A) が導出された。

この最後の式の最後の因子を

$$\sin(\pi/3 - A) = \sin[\pi - (\pi/3 - A)] = \sin(2\pi/3 + A)$$

を用いて置き換えれば、(A) から (B) がすぐに導かれる。

<sup>8</sup>この式が成り立つのをきちんと論証するには  $\angle CEF$  を求めたのと同様の議論をする必要がある。すなわち、点 E から辺 BC に垂線を下ろし、また辺 CE と角度  $\pi/3$  をなす、線分  $EZ'$  を描き、さらに同様にとられた線分  $EY'$  を描くと、三角形  $EY'Z'$  と三角形  $ADF$  は相似三角形であることから、 $\angle AFD = \pi/3 + C$  が求められる。

## 5.5 付録5 公式(5.9)の導出

$$\sin^2 B = \sin^2(\pi/3 + A) + \sin^2(\pi/3 + C) - 2\sin(\pi/3 + A)\sin(\pi/3 + C)\cos B \quad (5.9)$$

の導出を述べよう [3].

図5の $\triangle BED$ において, その内角は $\angle BDE = \pi/3 + A, \angle BED = \pi/3 + C, \angle DBE = B$ であるから, この三角形について正弦定理を用いれば

$$\frac{BE}{\sin(\pi/3 + A)} = \frac{BD}{\sin(\pi/3 + C)} = \frac{DE}{\sin B} = 2s \quad (5.38)$$

ここで $s$ は $\triangle BED$ の外接円の半径である.

さらに,  $\triangle BED$ の $DE$ に対して余弦定理を用いれば

$$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2(BD)(BE)\cos B \quad (5.39)$$

が成り立つ. すでに $BE, BD, DE$ は求められているので, それらを(5.39)に代入すれば

$$(2s)^2 \sin^2 B = (2s)^2 [\sin^2(\pi/3 + A) + \sin^2(\pi/3 + C) - 2\sin(\pi/3 + A)\sin(\pi/3 + C)\cos B] \quad (5.40)$$

が得られる. この式の両辺を $(2s)^2$ でわれば, (5.9)が得られる.

(2020. 9. 3)

## 参考文献

- [1] 武藤 徹, 『新しい数学の教科書』 II 図形編 (文一総合出版, 2010) 272-275
- [2] <http://mathtrain.jp/morley>
- [3] <http://ja.wikipedia.org/wiki/>
- [4] [http://en.wikipedia.org/Morley%27s\\_trisector\\_theorem](http://en.wikipedia.org/Morley%27s_trisector_theorem)

## 『思想を織る』を読む

矢野 忠<sup>\*1</sup>

### Reading “Weaving Thought”

Tadashi YANO <sup>\*2</sup>

先日、知人から電話が私のところへかかってきた。彼はいわゆる「オカルト現象」について人に聞いたり、本を読んだりしているうちに、とても不安になってきて仕事が手につかないのだという。今にも世の中が破滅してしまうのではないかと毎日毎日が心配でしようがない。どうしたものでしょうという。彼はごく普通の人であるが、科学には少なからず好奇心を持った人である<sup>\*3</sup>。

「世の中に超能力、超自然力といったものが存在すると思いますか」と彼はたずねる。「存在するということはどういう意味にとるかですが、超能力や超自然力によって、普通に車を動かしたり、工場のモーターを回したり、発電機をまわし発電させたり、できないですから、そういう生産や日常生活に用いられないものは存在しないといってもよいと思います」私は答えた。彼は重ねてたずねた。「我々の知らない新しい力を発見する可能性はまだ残っているではありませんか」「そうです。その可能性は確かに残っています。しかし、それは自然を探求することによってのみ、発見できるもので、超能力や超自然力といった形で現れるものではないと思います」……

私が上に述べたような見解をはじめて知ったのは武谷三男の『物理学入門』上（岩波新書）（現在、季節社より発行）の最初の章「科学とはどんなものか」によってである。

武谷三男の名は高校三年のとき、長兄から聞いてはじめて知ったと思う。兄の本立ての中に黄色の表紙の武谷の名著『弁証法の諸問題』と緑色の表紙の『続弁証法の諸問題』があった。兄のいないときに、こっそりとり出して開いてみたが、ちんぷんかんでまったくわからなかった。後年になって、この『弁証法の諸問題』には彼の名を不朽にした、自然の認識の三段階論が提唱されていることを知った。

ここで湯川博士の武谷評の一端を述べておこう。湯川博士は武谷の三段階論、すなわち、自然認識は「現象論的段階」、「実体論的段階」、「本質論的段階」の三つの段階を経て、深化するという理論をよくご存じであったと思う。

私たち若い物理屋がそれを信奉していることを前提にして話をよくされたが、ご自身はこの理論の信者ではなかった。湯川博士にとって枢要なのはいつも本質論的研究であった。三段階論を評価するとは一言もおっしゃらなかったが、「『弁証法の諸問題』に収録されている「台湾における国語国字問題」という論文はなかなかおもしろい、いいものだね」とおっしゃられたことは覚えている。

その後、湯川先生のご不在のときに、秘書の方に頼んで、先生の研究室を見せていただいたら、本でいっぱいになって、本来の机の機能を果たさなくなった机の上にこの『弁証法の諸問題』の復刻版がおいてあった。

大学に入って、教科書以外の本で一番早く買った本が、武谷の『物理学入門』上であった。当時どう思ったのか、この本だけは自分の名前を万年筆で書き込んである。しかし、残念ながら、現在までこの本を熟読したとはいうことができない。しかし、よくパラパラとめくっていたのか手垢で黒ずんでいる。

大学院生だったとき、研究室の小川修三教授がだれか集中講義に来てもらいたい先生はいないかといわれたので、「武谷さんはどうですか」と言ったら、その提案が受け入れられて、実際に武谷教授が立教大学から集中講義に来られた。広島大学理学部の階段教室で彼の「物理学方法論」と題する講義を聞いた。内容は大部分がどのよう

---

\*1 元愛媛大学工学部

\*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

\*3 このエッセイは私の高校のときの日本史の先生、竹本千万吉が退職後に毎月発行していた「今研通信」に掲載されたものである。これを再掲載するにあたっては注をいくつか入れたほかは文章はほとんど変わっていない。

にして、ケプラーが火星の太陽のまわりの回る軌道を決めたかという話であった。

彼の独特のいわゆる「認識論」について少し触れはしたが、しごくあっさりしたもので、『物理学入門』の中の「科学とはどんなものか」の章で述べられてあるような論理的に重厚なものではなかった。それまでのいくつかの書物からもっていた武谷像はもっと戦闘的というか、論理的に重厚な人というイメージが強かったために、かなり予想はずれという点でつまらない思いがした。しかし、彼は顔つきもやさしげで、にこにこして、やはり魅力的な人である、

私の先生の一人、S先生によれば、武谷さんの研究会での話はいつも古本を読むようだという\*4。これは歴史的にかなり古いところからいつもくりかえし話をはじめからなのだろう。それに関して、対比的に思いつくのは原子構造論の提唱者ニールス・ボーアのことである。ボーアの門下生たちが語ることによれば、ボーアは論文を書きはじめるときにはいつも古い歴史的な考察からはじめたという。

それはともかくとして、武谷さんの講義で印象に残っているのは内容ではなくて、黒板に絵を描くのが上手だということである。絵を描くのが下手な私は羨望の念を抱く。「教師はすべからず絵が上手に描けるべし」、私はそう考えているが、私にはいつもないものねだりに等しい。

ともかく、武谷の名が強烈に頭に焼き付いたのは、『物理学入門』の最初の部分と1958年ころに勁草書房から出た『自然科学概論第一巻』によってであった。そういうことが機縁となって、当時まだ旧広島高校跡にあった広島大学教養部の図書館で『戦争と科学』を借りて読んだ。

私は読書家というほどには本をよく読んではいないが、すこし収集癖があるようだ。いま、この武谷の『思想を織る』の末尾にある著作リストを見てみると、一冊を除いて35冊すべて持っている。勁草書房から出版された、『武谷三男著作集』、『武谷三男現代論集』はもとより岩波新書の『死の灰』、『原水爆実験』、『安全性の考え方』、『原子力発電』等々。しかし、ここで蔵書の冊数を誇ることが本意ではない。大学のような比較的読書には恵まれたところに勤めていても、自分の読みたい本を大学の図書館で必ず見つけられるわけではないことを知らされたのが、このように好きな著者の本を狂的に集めることになったようだ。

最近、私も人並みに忙しくなって、毎日の新聞も読めないことがあるが、私の子どもが気がついたときには「武谷さんの本の広告が出ていたよ」と教えてくれる。この『思想を織る』もそういうことから知った本の一つである。

武谷はこの本のあとがきに、これは自叙伝ではありませんと断っているが、この本は実質的には物理学者であり、市民運動家としての彼の自叙伝といってよい。この本を読むと、ハイゼンベルクの自伝的対話『部分と全体』を自然と思いつかべてしまう。

ところで、物理学者の自叙伝なぞというと、湯川、朝永といった著名な学者はともかくとして、あまり面白くないであろうと思われる方もあるだろうが、この本はそうではない。

一つには武谷の関心が物理学の中にだけ閉じてはいないで、哲学、文学、音楽、芸術の世界やまた公害、労災、戦争、核問題等の現代社会における実際的な問題点にあるというその幅の広さが退屈させないのだと思う。

『思想を織る』とは織物の縦糸と横糸とで織っていくように自分の思想をいろいろ思いつくところからヒントを得て、つくりあげていったということから、名づけたと著者はいう。たとえば、武谷三男といえば、彼の「三段階論」を思い出すが、この「三段階論」を彼が構築するのにももちろんマルクスの『資本論』の論理、ヘーゲルの論理学、エンゲルスの『自然弁証法』が根底にあるのは事実だが、中井正一の『委員会の論理』、ロマン・ロランの著作やメルスマンの音楽美学といった音楽の分野にも彼の思想の根源をもっているというから驚く。

この本が彼の一番新しい本であるために、彼の取り組んできた主要な問題についての思索および行動指針についてのわかりやすい説明が随所に見られる。この一冊で、武谷の仕事が全部わかってしまったと思うことは危険千万だけれども、やはり湯川の「中間子論」の共同研究者の一人で、ユニークな世界的物理学者ミツオ・タケタニの思想の輪郭を捉まえることができよう。創造的な仕事を目指す人はいかなる分野の人でも一読の価値がある。

---

\*4 S先生とは愛媛大学名誉教授だった故仙波敬先生のことである。

## 編集後記

今年もはやくも9月となった。10巻6号を発行する。暑さのために熱中症で亡くなる方が多くて、新型コロナウイルスの感染はまだ続いてはいるが、ちょっと背景に引いた感じがしている。

今月は少なくとももう一号10巻7号を発行するつもりだが、8号は発行できるかどうかは見通せていない。一つは編集者には9月中にまとめた仕事があるためでもある。それで9月はなかなか編集者にとって忙しい月である。

掲載論文はいつもの世戸さんの「Radon 変換と CT スキャナー (3)」の研究と武藤徹先生の「モーリーの定理」である。特に武藤先生の論文の掲載が何年も遅れたことは編集者として申し訳がない。

予備的な編集を見た、共同編集者の世戸憲治さんから2.2と2.3との順番を入れ替えたほうが理解しやすいとのアドバイスがあり、そこを入れ替えた。ご意見をいただいた世戸さんに感謝する。

共同編集者の新関章三さんのことだが、病院に長期入院しておられ、実は新型コロナのこともあって面会に行けないでいる。そのうちになんとか連絡を取りたいと思っている。

(追記) 最終編集が終わってから、共同編集者の世戸さんから重ねてご意見をいただいた。本来、原稿に付加したほうがいいのだろうが、この編集後記に追記する。

特に、修正しなければということはないのですが、初めに読んだとき、(2.4) 式の  $\angle APD = \angle BPD$  というのが分からずに悩んでしまいましたが、これは「三角形のそれぞれの角の2等分線は1点で交わる」という定理があったのですね。そのことをちょっと書いていただければ良かったと思います。

それと私は幾何の定理はほとんど忘れてしまい、共線や共円と言われてもなんのことだっけという調子です。

第一の点は世戸さんの補足された通りである。

第二の点の共線や共円はあまり一般化している用語でもないようなので、補足をしておきたい。

3つ以上の点があり、それらが同一直線上に載っている場合には、共線 (collinear) であるという。同様に4つ以上の点があり、それらが同一の円の上に載っている場合に共円であるという。

共円に対応した英語は武藤徹先生が書かれた本でも本によって同じではない。『新しい数学の教科書』II (図形編) (文一総合出版) の索引では concircularity とあり、もう一方では『算数・数学用語辞典』(東京堂出版) cocycle となっている。そのどちらも使われているのか明らかではない。岩波の『数学入門辞典』にはこれらの語は採用されていない。

共線とか共面 (coplanar) とかは線形代数を学んでいる方々にはなじみのある概念かもしれないが、私もよく知らなかった。どうもあまり使われてない用語のようでもあるので、またあらためてどこかで詳しく説明する必要があると感じている。

(矢野 忠)