ベクトル代数

数と量と単位と次元

物理で重要となる数と量の違いについて解説しておく．

数 (number) は，1 つ 2 つと数えられる (count) ものに使う概念である．例えば「リンゴが 3 個」というときの 3 が数である．

量 (quantity) とは，1 つ 2 つと数えることはできないが，大小・長短・高低・重軽などの比較が可能なものに使う概念である．また，量は 2 倍，3 倍などのスカラー倍演算が可能である．量の足し算も可能である．

例えば，運動場の横幅の長さは量である．長さそのものは数えられないが，運動場を歩けば「120 歩」というように,「1 歩」の何倍なのかということは数えることはできる．つまり，基準の量を定めれば，基準量の何倍の大きさかということは勘定できる．そのような基準量のことを単位量ともいう．量そのものは数ではないが，単位量を決めると量は数で表される．したがって

$$量 = 係数 \times 基準量 \tag{1}$$

と書くことができる．例えば，長さについて

$$L = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm} \tag{2}$$

という式は,「L という量は，m（メートル）という単位量の 3 倍であり，cm（センチメートル）という単位量の 300 倍でもある」ことを意味する．長さの足し算は，1 m =100 cm という単位の変換をして

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= 3 \times 100\,\mathrm{cm} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= 350\,\mathrm{cm} \\ &= 3.5 \times 100\,\mathrm{cm} \\ &= 3.5\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{3}$$

と計算される．長さと質量を足そうと思っても，単位をそろえることができないので，一つの量にまとまらない：

$$\begin{aligned} L + M &= 3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{g} \\ &= 300\,\mathrm{cm} + 0.05\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{4}$$

長さ同士，あるいは質量同士のように足し算ができる量のことを「次元がそろっている量」という．

量の掛け算・割り算は新しい次元の量を定義する．例えば，力と距離を掛け算すると仕事という別の種類の量が定まる．10N の力 F で物体を距離 L =3m 動かすときの仕事は

$$W = FL = (10\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{Nm} = 30\,\mathrm{J} \tag{5}$$

である．

物理量は特定の単位で測らなければならないわけではない．メートルで表そうが，インチで表そうが，長さは長さである.「長さ L m」と書くよりも「長さ L」と書く方がよい.「長さ L m」と書いてしまうと，メートル以外の単位が使えなくなってしまう.「長さ L」と書いておけば L を m で測ることも cm で測ることもできて，$L = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm}$ という式を書いてよい．

「長さ L」という書き方にしておくと，どんな単位系でも成り立つ関係式を書ける．例えば，縦横の辺の長さが L_1, L_2 の長方形の面積は $S = L_1 L_2$ であるが，この関係式は長さを m で表しても cm で表しても成り立つ．また，長さの単位を選べば自動的に面積の単位も決まる．

また，$L = 3\,[\mathrm{m}]$ のように単位に括弧を付けて書く流儀があるが，長さ L は m（メートル）の 3 倍なのだから堂々と $L = 3\,\mathrm{m}$ と書けばよい．

物理量に具体的な値を代入して計算するときは，単位を付けたまま計算するとよい．例えば時速 270 km を秒速に換算するのは，1 km = 1000m, 1 時間=60 分，1

分＝60 秒などから

$$\begin{aligned} V &= \frac{L}{T} = \frac{270\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{270\times 10^3\,\mathrm{m}}{1\times 60\,\mathrm{min}} = \frac{270\times 10^3\,\mathrm{m}}{1\times 60\times 60\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2.7\times 10^2\times 10^3\,\mathrm{m}}{3.6\times 10^3\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2.7}{3.6}\times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{3}{4}\times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= 0.75\times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= 75\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{6}$$

と計算できる．正しい式を書けば正しい単位が自動的に付いてくるはずなので，計算のチェックにもなる．

問 1．地球の半径は約 6400km であり，地球は 1 日 1 回自転している．赤道における自転運動による地表面の速度を求めて，秒速で表せ．

問 2．地球と太陽の距離は約 1 億 5 千万 km であり，太陽の周りを地球は 1 年 1 回公転している．地球の公転運動速度を求めて，秒速で表せ．

問 3．地球と月の距離は約 38 万 km であり，地球の周りを月は約 27.3 日で 1 回公転している．月の公転運動速度を求めて，秒速で表せ．

問 4．問 1, 2, 3 の答えを速いものから順に並べよ．

問 5．質量 20g の物体がマッハ 1=秒速 340m で飛ぶときの運動エネルギーと，質量 20kg の物体が高さ 10 m の所から落ちて得る運動エネルギーではどちらが大きいか？　暗算だけで比較できるか？　また，ちゃんと計算して比較してみよ．

スカラー量とベクトル量

スカラー (scalar)：大きさや正負の符号はあるが，空間的な向きのない量．単位量を決めれば実数一つで数値化できるもの．質量・電荷・温度・エネルギーなどはスカラー量である．

ベクトル (vector)：大きさと空間的な向きのある量．3 次元空間なら単位量と基準方向 $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ を定めると 3 つの実数で数値化できる．例えば速度ベクトル $\boldsymbol{V}$ は 3 つの実数の組 (v_x, v_y, v_z) を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= (v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z)\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{7}$$

と表されるし，$V_x = v_x\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ を単位込みの量とすれば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= V_x\boldsymbol{e}_x + V_y\boldsymbol{e}_y + V_z\boldsymbol{e}_z \\ &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

と表せる．基準方向が明らかな場合は $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ を省略して

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \tag{9}$$

と書いてよい．

ベクトル代数

ベクトルの演算にはスカラー倍・和・内積・ノルム・外積がある．ベクトル同士を外積したものがベクトルになるのは，3 次元空間だけの特徴である．スカラー量の集合を S ベクトル量の集合を V とする．以下では，基準ベクトル $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ は長さ 1 の，互いに直交し，右手系をなすベクトルの組とする．

スカラー倍：$\lambda \in S$, $\boldsymbol{A} \in V$ に対して

$$\lambda\boldsymbol{A} = \lambda\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_x \\ \lambda A_y \\ \lambda A_z \end{pmatrix} \in V \tag{10}$$

和：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{pmatrix} \in V \end{aligned} \tag{11}$$

内積：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x, A_y, A_z)\cdot\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \in S \end{aligned} \tag{12}$$

2つのベクトルの内積がゼロであることベクトルが直交することは同値である．

ノルム：$\boldsymbol{A} \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{A}|| &= \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \\
&= \sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2} \in S
\end{aligned} \tag{13}
$$

外積：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in V$ に対して

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \in V \tag{14}
$$

外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の両方に直交し，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の順に右手系をなす向きを持つ．

スカラーの 0 とベクトルの

$$
\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}
$$

を区別し，$\boldsymbol{0}$ をヌルベクトルとか零ベクトルと呼ぶ．$\boldsymbol{0}$ の特徴として，任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して

$$
\boldsymbol{V} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{V} \tag{16}
$$

が成り立つことと，任意のスカラー λ に対して

$$
\lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \tag{17}
$$

が成り立つことが挙げられる．

ベクトル代数の公式：

$$
\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{18}
$$

$$
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}, \tag{19}
$$

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} \\
&\quad = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B},
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0, \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \\
&\quad = ||\boldsymbol{A}||^2\,||\boldsymbol{B}||^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2,
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}, \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A} \\
&\quad +(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0},
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) \\
&\quad = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})
\end{aligned} \tag{26}
$$

記号

便利な記号としてクロネッカー (Kronecker) のデルタと，レヴィチヴィタ (Levi-Civita) のイプシロンを導入しておく．

クロネッカーのデルタは，整数の添字 i, j を付けられた記号で

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{27}
$$

で定義される．

レヴィチヴィタのイプシロンは，3 次元空間に対しては 3 つの添字を持つ記号で

$$
\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ((ijk) \text{ が } (123) \text{ の偶置換のとき}) \\ -1 & ((ijk) \text{ が } (123) \text{ の奇置換のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{28}
$$

である．これらの記号を用いると，右手系の規格直交基底 $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ が満たす関係式を

$$
\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \tag{29}
$$

$$
\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{30}
$$

と書くことができる．

問 6. 関係式

$$
\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \tag{31}
$$

を証明せよ．

問 7. 公式 (18)-(26) を証明せよ．