数と量

数と量と単位

数(すう)と量(りょう)は，物理に限らず，ものごとを捉える方法としてどちらも重要だが，異なる概念である．数と量の違いについて解説しておく．

数 (number) は，1つ2つと**数えられる** (countable) ものを抽象化した概念である．例えば「リンゴが3個」,「カラスが3羽」と言っているときの「3」が数である．

量 (quantity) とは，1つ2つと数えることはできないが (uncountable)，長さとか嵩(かさ)（体積）とか重さを備えていて，**大小**・多少・長短・高低・重軽など**の比較が可能なもの**を抽象化した概念である．また，量は2倍，3倍などのスカラー倍演算が可能である．例えば，L という長さを10倍にした $10L$ という量があり得る．量の足し算も可能である．例えば，長さ L_1 と L_2 を足した長さ L_1+L_2 が定まる．しかし,「ロープの長さ」と「石の重さ」の足し算はできないし，大小比較もできない．**量とは，同質性と大小関係を備えており，スカラー倍・加法性という演算が可能なものだ**と言える．

例えば，運動場の幅や，テニスコートの縦横の長さは量である．**長さそのものは数えられない**が，運動場を歩けば「120歩」というように,「1歩」の何倍なのかということは数えることはできる．つまり，**基準の量を定めれば,「基準量の何倍の大きさか」という数は勘定できる．**そのような基準量のことを**単位量** (unit) ともいう．このことは，

$$量 = 係数 \times 基準量 \tag{1}$$

と書くことができる．例えば，長さについて

$$L = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm} \tag{2}$$

という式は「L という量は，m（メートル）という単位量の3倍に等しい，また，cm（センチメートル）という単位量の300倍にも等しい」ことを意味する．標語的に言うと，**量そのものは数ではないが，単位量を決めると量は数で表される．**

$L_1 = 3\,\mathrm{m}$ と $L_2 = 50\,\mathrm{cm}$ という長さの足し算は

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= 3 \times 100\,\mathrm{cm} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= 300\,\mathrm{cm} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= (300+50)\,\mathrm{cm} \\ &= 350\,\mathrm{cm} \\ &= 3.5 \times 100\,\mathrm{cm} \\ &= 3.5\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{3}$$

と計算できる．ここで，1 m =100 cm（1mは1cmの100倍に等しい）という単位の変換を用いた．

他方，長さと質量を足そうと思っても，いくら単位を変換しても同一の単位にそろえることができず，一つの量にまとまらない：

$$\begin{aligned} L + M &= 3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{g} \\ &= 300\,\mathrm{cm} + 0.05\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{4}$$

長さ同士，あるいは，質量同士のように，**互いに同質で足し算ができる量**のことを**次元がそろっている量**という．

物理量は特定の単位で測らなければならないわけではない．例えば，メートルで表そうが，インチで表そうが，フィートで表そうが，長さは長さである（1インチ =2.54 cm, 1フィート =30.48 cm）．そう考えると，記号で長さを表すときは,「長さ L m」と書くよりも，記号 L に単位も含めてしまって**「長さ L」と書く方がよい**.「長さ L m」と書いてしまうと，m以外の単位が使えなくなってしまう.「長さ L」と書いておけば L を m で測ることも cm で測ることもできて，$L = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm}$ と書ける．

「長さ L」と書いておくと，どんな単位系でも成り立つ関係式を書ける．例えば，縦横の辺の長さが L_1, L_2 の長方形の面積は

$$A = L_1 L_2 \tag{5}$$

であるが，この関係式は長さを m で表しても cm で表しても成り立つ．また，長さの単位を選べば自動的に面積の単位も決まる．例えば，$L_1 = 300$ cm と $L_2 = 60$ cm を代入して

$$\begin{aligned} A &= 300\,\mathrm{cm} \times 60\,\mathrm{cm} = 18000\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 3\,\mathrm{m} \times 0.6\,\mathrm{m} = 1.8\,\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

のように計算途中で単位を替えてもよい．

逆に，はじめから記号に単位を付けてしまうと，かえって不便である．ためしに「縦の長さが L_1 ヤード，横の長さが L_2 ヤードの長方形の土地の面積 A エーカー」を表す公式を作ってみてほしい（1 エーカー =43560 平方フィート，1 ヤード =3 フィート）．

また，$L = 3\,[\mathrm{m}]$ のように単位に括弧を付けて書く流儀もあるが，この括弧は使わない方がよい．「長さ L は m の 3 倍だ」と言いたいのだから堂々と $L = 3\,\mathrm{m}$ と書いてよい．

同様に，「質量 M kg の物体」と書くよりも「質量 M の物体」と書く方がよい．例えば

$$M = 1\,\text{ポンド} = 453\,\mathrm{g} = 0.453\,\mathrm{kg} \tag{7}$$

というように単位の異なる値を等号で結んでよい．**1 ポンドと 453 g は等しいのだから堂々とイコールでつなげてよいのである．**

抽象的な関係式を書くときは，単位系を使わずに書く．例えば，一定の速度 V，時間 T で進む距離は $L = VT$ である．この式から

$$V = \frac{L}{T} \tag{8}$$

である．

物理量に具体的な値を当てはめて計算するときは，単位を付けたまま計算するとよい．例えば，時速 270 km を秒速に換算したいときは，1 km = 1000m, 1 時間=60 分，1 分= 60 秒などから

$$\begin{aligned} V &= \frac{L}{T} = \frac{270\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{270 \times 10^3\,\mathrm{m}}{1 \times 60\,\mathrm{min}} = \frac{270 \times 10^3\,\mathrm{m}}{1 \times 60 \times 60\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2.7 \times 10^2 \times 10^3\,\mathrm{m}}{3.6 \times 10^3\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2.7}{3.6} \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{3}{4} \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= 0.75 \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= 75\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{9}$$

と計算できる．**正しい式を書けば自動的に正しい単位が付くはず**なので，単位を見れば計算すべき式を書いているかどうかのチェックにもなる．

量の掛け算・割り算により新しい次元の量が定義される．例えば，力 F (force) と距離 L (length) の掛け算で「仕事 (work)」

$$W = FL \tag{10}$$

という別種の量が定まる．この式は，仕事 W は長さ L に比例する量であり（長い距離を動かすとたくさんの仕事が要る），その比例係数が力 F である，と解釈してもよい．具体的に，力 $F = 10$ N（N は力の単位，ニュートン）で物体を L =3 m 動かす仕事は

$$W = FL = (10\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{Nm} = 30\,\mathrm{J} \tag{11}$$

に等しい（J は仕事の単位，ジュール）．この式から

$$F = \frac{W}{L} \tag{12}$$

が導かれ，**力は長さあたりの仕事である**ことを意味する．例えば，10N の力は 1m あたり 10J の仕事をする力であり，

$$F = 10\,\mathrm{N} = 10\,\mathrm{J\ m^{-1}} \tag{13}$$

と書いてよい．

また，面積 A (area) と圧力 P (pressure) を掛け算すると力 F (force) になる

$$F = PA. \tag{14}$$

この式は「圧力が大きいほど，また，面積が大きいほど，受ける力は大きい」という意味に解釈できる．正確には，力は圧力と面積に比例する，と言うべきである．力を面積で割ると圧力になる

$$\frac{F}{A} = P. \tag{15}$$

つまり，**圧力は単位面積あたりの力である**．$1\mathrm{m}^2$ あたり 1N の力がかかる圧力を 1Pa（パスカル）と定める．また，100Pa = 1hPa（ヘクトパスカル）と定める．1 気圧 =1013 ヘクトパスカルは

$$\begin{aligned} P &= 1013\,\mathrm{hPa} \\ &= 1013 \times 100\,\mathrm{Pa} \\ &= 1013 \times 100\,\mathrm{N\ m}^{-2} \\ &= 1.013 \times 10^5\,\mathrm{N\ m}^{-2} \end{aligned} \tag{16}$$

に等しい．

質量 1kg の物体に働く重力を「1kg 重」という．これは 1kg の物体に $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ の加速度を生じさせる力であり,（質量）×（加速度）=（力）なので,

$$1\,\mathrm{kg}\,重 = 1\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9.8\,\mathrm{N} \tag{17}$$

に等しい．また，$1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$ だから，上に示した気圧 $P = 1013\,\mathrm{hPa}$ は,

$$\begin{aligned} P &= 1.013 \times 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \\ &= 1.013 \times 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}\,重}\,\frac{\mathrm{kg}\,重}{(100\,\mathrm{cm})^2} \\ &= 1.013 \times 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{9.8\mathrm{N}}\,\frac{\mathrm{kg}\,重}{10^4\,\mathrm{cm}^2} \\ &= \frac{1.013}{9.8} \times 10^5 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}\,重}{\mathrm{cm}^2} \\ &= 0.1034 \times 10^1\,\mathrm{kg}\,重\,\mathrm{cm}^{-2} \\ &= 1.034\,\mathrm{kg}\,重\,\mathrm{cm}^{-2} \end{aligned} \tag{18}$$

と換算される．つまり，1 気圧とは，1 cm^2 あたり 1.03 kg の重さがのしかかっているくらいの圧力である．

質量密度は単位体積あたりの質量である．$\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ は質量密度の単位である．ただし，1 m^3 の鉄やコンクリートの質量は，日常的に人が持ち運ぶものの重さと比べるとあまりにも大きいので，質量密度は 1 cm^3 あたりの質量を g（グラム）で測る単位，g cm^{-3} で表示することが多い．

有効数字

どのような測定値も限りなく正確なわけではなく，測定値には不確かさが伴う．例えば，鉛筆の長さをものさしで測るとき，**ものさしの目盛りが mm（ミリメートル）刻みであれば，1mm よりも小さな長さを数値化することはできない**ので,「L =172mm」という測定値を読み取ったときも,「L は 171mm よりも 172mm に近くて，173mm よりも 172mm に近い」と言うべきであり，さらに言い換えると「L は 171.5mm よりは長くて 172.5mm よりは短い」ということであるから

$$171.5\,\mathrm{mm} \ \leq\ L\ <\ 172.5\,\mathrm{mm} \tag{19}$$

と書くべきである．この場合，L の**有効数字** (significant figures) は 3 ケタだという．はじめの 3 ケタの数字しか信用できない，4 ケタ目の数字は不確かだということである．また，いまの場合,「172mm」を「17.2cm」と書き換えるのは適切だが,「17.20cm」と書くのは不適切である．有効数字が明確になるように

$$L = 1.72 \times 10^2\,\mathrm{mm} = 1.72 \times 10^{-1}\,\mathrm{m} \tag{20}$$

と書くこともある.「1.72」の部分が有効数字である．いまの場合，$L = 1.720 \times 10^2\,\mathrm{mm}$ と書いてはいけない．

それに対して，例えば底辺の長さ a, 高さ h の三角形の面積 S について

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{21}$$

という関係式が成り立つが，この $\frac{1}{2}$ という数は実験で測られた値ではなく，数学的定義に従って決められた数であり，ジャスト $\frac{1}{2}$ である．これを 0.50 とか 0.500 と書くのはおかしい．小数で表すとしたら $0.500000\cdots$ と書くべき数である．このような数の有効数字のケタ数は無限になる．

鉛筆の長さ $L = 1.72 \times 10^2\,\mathrm{mm}$ のような，有限な精度を持つ数値を**測定値**とか**近似値**という．それ

に対して，三角形の面積公式の係数 $\frac{1}{2}$ のような無限の精度を持つ数値を**厳密値**という．

近似値の掛け算や割り算には注意が必要である．例えば，横の長さ 421mm, 縦の長さ 86mm の長方形の面積を

$$421\,\mathrm{mm} \times 86\,\mathrm{mm} \;=\; 36206\,\mathrm{mm}^2 \tag{22}$$

と計算するのは数学的には正しいが，ものさしの目盛りが 1mm 単位しかないのだとすると，「421mm」という読み取り値はじつは「420.5mm から 421.5mm までの間の値」とみなすべきだし，「86mm」も「85.5mm から 86.5mm までの間の値」とみなすべきである．そうすると，控えめに面積を見積もると

$$420.5\,\mathrm{mm} \times 85.5\,\mathrm{mm} \;=\; 35952.75\,\mathrm{mm}^2 \tag{23}$$

となるし，大きめに面積を見積もると

$$421.5\,\mathrm{mm} \times 86.5\,\mathrm{mm} \;=\; 36459.75\,\mathrm{mm}^2 \tag{24}$$

となる（穴あき算でも同様の結果を確かめてみよう）．そうすると，(22) 式の $36206\,\mathrm{mm}^2$ という値は文字通りには信じることができない．せいぜい最初の 36 という数字は当たっていると言えるだけである．この場合は，計算結果の 3 ケタ目の数を**四捨五入**して

$$\begin{aligned} 421\,\mathrm{mm} \times 86\,\mathrm{mm} \;&=\; 36206\,\mathrm{mm}^2 \\ &\fallingdotseq\; 36000\,\mathrm{mm}^2 \\ &=\; 3.6 \times 10^4\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned} \tag{25}$$

とするのが**物理学的に妥当な答え**である．

有効数字 3 ケタの値と有効数字 2 ケタの値を掛け算または割り算した場合，答えの有効数字は 2 ケタしかない．一般に，有効数字 m ケタの値と有効数字 n ケタの値を掛け算または割り算した場合，$m \geq n$ なら答えの有効数字は n ケタしかなく，計算結果の上から $n+1$ ケタ目の数を四捨五入する．

問 1. 鉄の質量密度は $\rho = 7\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$ である．これを $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ の単位に換算せよ．

問 2. 地球の半径は約 6400km であり，地球は 1 日 1 回自転している．自転運動による赤道における地表面の速度を求めて，秒速で表せ．

問 3. 地球と太陽の距離は約 1 億 5 千万 km であり，太陽の周りを地球は 1 年 1 回公転している．地球の公転運動速度を求めて，秒速で表せ．

問 4. 地球と月の距離は約 38 万 km であり，地球の周りを月は約 27.3 日で 1 回公転している．月の公転運動速度を求めて，秒速で表せ．

問 5. 問 2, 3, 4 の答えを速いものから順に並べよ．

問 6. 質量 20g の物体がマッハ 1=秒速 340m で飛ぶときの運動エネルギーと，質量 20kg の物体が高さ 10 mの所から落ちたときの運動エネルギーとではどちらが大きいか？　暗算だけで比較できるか？　また，ちゃんと値を計算して比較してみよ．

問 7. 近似値の足し算や引き算に関しては，どのようなことを注意すべきであろうか．

次元解析

単位系の概念をより抽象化したものとして，物理的次元の概念を紹介しよう．本当は，物理的次元の方が，単位系よりも基本的な概念である．

「体積」や「重さ」は，ある種の均質性を備えたものに対して使える概念である．例えば,「均質な」水だからこそ，体積を 2 倍・3 倍したものも水だと言えるし，コップの水とバケツの水を足したものも水だと言える．このように，**スカラー倍と和が可能であるような量の同質性・均質性を抽象化した概念**を**次元** (dimension) あるいは**物理的次元**と呼ぶ．

次元にはいろいろな種類がある．例えば，長さ (length) の次元 L，時間 (time) の次元 T，質量 (mass) の次元 M，面積 (area) の次元 A，体積 (volume) の次元 Vol，エネルギー (energy) の次元 E などがある．ここで L や T は，3 メートルや 12 時間などの具体的な長さや時間ではなく,「抽象的な長さ」や「抽象的な時間」を表すシンボルだと思ってほしい．

記号の使い方として，例えば，変数 x が長さの次元を持っていることを

$$[x] = L \tag{26}$$

と書く．また，3m（メートル）のような定量に対

しても

$$[3\mathrm{m}] = L \tag{27}$$

と書く．この式は「3 m という量は，長さの次元 L を持つ」と読む．

「長さ」と「重さ」のような異質な量は，足し算できないし，大小比較もできない．**同じ次元を持っている量だけが，足し算・引き算・等号・不等号の対象になる．**

しかし，**次元の異なる量を掛け算または割り算してもよい．**むしろ，**掛け算や割り算することによって，別の次元の量が定義される．**例えば，面積の次元 A は長さの次元 L の 2 乗に等しい：

$$A = L^2 \tag{28}$$

体積の次元 Vol は長さの次元 L の 3 乗に等しい：

$$\mathrm{Vol} = L^3 \tag{29}$$

微分した物理量の次元は「物理的次元の割り算」になる．例えば，距離を時間で 1 回，2 回微分すると

$$\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \tag{30}$$

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \left[\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}\right] = \frac{[x]}{[t]^2} = LT^{-2} \tag{31}$$

という次元の量になる．ゆえに速度 (velocity) の次元 Vel は，長さを時間で割った次元に等しく

$$\mathrm{Vel} = LT^{-1} \tag{32}$$

加速度 (acceleration) の次元 Acc は，長さを時間で 2 回割った次元に等しい：

$$\mathrm{Acc} = LT^{-2}. \tag{33}$$

力 (force) の次元 F は加速度に質量を掛けたものに等しい：

$$F = MLT^{-2}. \tag{34}$$

一方で，積分した物理量の次元は「物理的次元の掛け算」になる．例えば速度を時間について積分した量の次元は

$$\left[\int v\,dt\right] = [v]\cdot[t] = LT^{-1}\cdot T = L \tag{35}$$

となり，長さの次元になる．

物理的に意味のある等式や不等式の各項・両辺は同じ次元を持っていなければならない．例えば，ばねが長さ x だけ伸びたときにばねが縮もうとする力を F とすると，

$$F = -kx \tag{36}$$

という関係式が成り立つが，左辺の力の次元は

$$[F] = MLT^{-2} \tag{37}$$

であり，右辺の次元は

$$[kx] = [k][x] = [k]L \tag{38}$$

なので，

$$[k] = MT^{-2} \tag{39}$$

でなくてはならない．このばねに質量 m の物体がつながっていたとする．m/k という量の次元を求めると，

$$\left[\frac{m}{k}\right] = \frac{M}{MT^{-2}} = T^2 \tag{40}$$

となるので，m/k の平方根は時間の次元を持つことがわかる：

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = T \tag{41}$$

この時間は，ばね定数 k のばねにつなげられた質量 m のおもりの運動に関係しているはずである．実際，おもりが振動する周期（1 往復の振動をするのに要する時間）は $\sqrt{m/k}$ に比例する．この式 (41) だけから，おもりの質量を 4 倍，9 倍にすれば，おもりの振動の周期は 2 倍，3 倍になることがわかる．また，ばね定数を 4 倍，9 倍にすれば（強いばねを使えば），振動周期は 1/2 倍，1/3 倍になることもわかる．このように物理的次元を用いて，いろいろな量の比例関係を調べることを**次元解析** (dimensional analysis) という．

また，次元を使うと，いろいろな計算のチェックが簡単にできる．例えば，長さを求めるつもりで書

いた式の次元が面積の次元になっていたら，**計算をしなくても式が間違っていることがわかる．**

式の途中に「面積＋重さ」のような，次元のそろっていない式が現れたら，それも物理的にあり得ない計算式である．

問 8. 質量 M，長さ L, 時間 T を掛け算・割り算で組み合わせて，以下の量の次元を表せ．速度，加速度，力，仕事，エネルギー，面積，体積，角度，圧力，運動量，角運動量，力積，トルク

問 9. 長さ×運動量，時間×エネルギー，角運動量，圧力×体積の次元を求めよ．

問 10. 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{42}$$

の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{43}$$

で与えられるが，この関係式を次元解析の観点から分析・検討せよ．

問 11. 以下の不定積分を求めて，次元解析的に吟味せよ：

$$\text{(i)} \int \frac{a}{a^2 + x^2}\, dx \tag{44}$$

$$\text{(ii)} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \tag{45}$$

問 12. 加速度 g の重力を受けて長さ ℓ のひもにぶら下がった振り子が振れる場面を考える．g と ℓ の関数で時間の次元の量 τ を作れ．振り子の周期（1 往復の振動に要する時間）を 2 倍にしたかったら振り子のひもの長さを何倍にすればよいか．

問 13. 気体の密度（単位体積あたりの質量）ρ と気体の圧力 P の関数で速度の次元の量 v を表す式を作れ．また，1 気圧 $(= 1.013 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}})$ の空気の密度は，およそ $1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ である．このデータに対する v の値を求めよ．この結果は，空気中の音速に近い値になる．

問 14. 万有引力の法則と運動方程式を組み合わせた式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{46}$$

に次元解析を適用して，ケプラーの第 3 法則（惑星の公転周期 T と惑星の公転半径 R の間に $T^2 \propto R^3$ という比例関係が成立すること）を証明せよ．

問 15. 太陽と惑星の距離は，金星・地球・火星・木星・土星について $0.72 : 1.00 : 1.52 : 5.20 : 9.55$ という比である．公転周期はそれぞれ地球の 1 年の何倍と予想されるか．

次元解析的考慮のない単位系

イギリスやアメリカでいまも使われている単位を紹介しておく．長さの単位：

$$1\,\text{インチ} = 25.4\text{mm}, \tag{47}$$
$$1\,\text{フィート} = 12\,\text{インチ} = 304.8\text{mm}, \tag{48}$$
$$1\,\text{ヤード} = 3\,\text{フィート} = 0.9144\text{m}, \tag{49}$$
$$1\,\text{マイル} = 1760\,\text{ヤード} = 1609.344\text{m} \tag{50}$$

輸入ものの服や靴のサイズがインチ表示になっているのはしばしば見かけるだろう．ゴルフボールの飛距離はヤードで表されることが多い．国際線の飛行機では，高度はフィート単位で，水平距離はマイル単位で表されていることが多い．

面積の単位（アメリカ式）：

$$1\,\text{エーカー} = 43560\,\text{平方フィート} \tag{51}$$

容積（体積）の単位（アメリカ式，液量の場合）：

$$1\,\text{リットル} = 1\text{L} = 1000\text{mL} = 1000\text{cm}^3, \tag{52}$$
$$1\,\text{パイント} = 473.2\text{mL}, \tag{53}$$
$$1\,\text{ガロン} = 8\,\text{パイント} = 3.785\text{L}, \tag{54}$$
$$1\,\text{バレル} = 42\,\text{ガロン} = 159\text{L} \tag{55}$$

ただし，イギリスだけで使われる単位やアメリカだけで使われる単位もある．また，液体を測るときと，穀物（小麦やとうもろこし）など乾いたものを測るときでは，同じ名前の単位でも単位量が異なることがある．パイントは，牛乳やアイスクリームやビールの体積を表すのによく用いられている．ガロンはガソリンの体積の単位として用いられている．バレルは石油の体積の単位として定着している．

次元解析的に考えると，長さの単位を「インチ」と定めたなら，面積の単位を「平方インチ」，体積の単位を「立方インチ」と定めればよい気がするのだが，そうはなっていない．同じ物理量に対してさまざまな単位があるときも，10 進法の区切りになっていない．次元解析を尊重した単位系を**組み立て単位系** (system of constructive units) という．そうでない単位系は，とくに名前はないが，いわば**気まぐれ単位系** (system of ad hoc units) ということになろうか．そのようなものを system と呼ぶのもふさわしくない気もする．

問 16. 1 パイントを立方インチで表すといくらか．

無次元量

「長さ」を「長さ」で割り算したものや,「重さ」を「重さ」で割り算したものは，何の次元も持たない「ただの数」になる．そういう数を**無次元量** (dimensionless quantity) という．例えば，円周率 π や，角度は無次元量である．無次元量の次元は $[\pi] = M^0L^0T^0$ となる．

とくに角度や時間の単位は 60 進法や 12 進法のなごりがあって，単位の換算が少し面倒である．時間の単位は常識だと思うが,

$$1\,\text{日 (day)} = 24\,\text{時間 (hour)} \tag{56}$$

$$1\,\text{時間 (hour)} = 60\,\text{分 (minute)} \tag{57}$$

$$1\,\text{分 (minute)} = 60\,\text{秒 (second)} \tag{58}$$

だから

$$\begin{aligned} 1\,\text{日} &= 24\,\text{時間} \\ &= 24 \times 60\,\text{分} \\ &= 24 \times 60 \times 60\,\text{秒} = 86400\,\text{秒} \end{aligned} \tag{59}$$

である．角度については度・分・秒という単位がある：

$$1\,\text{周} = 360^\circ\text{（度）} \tag{60}$$

$$1^\circ\text{（度）} = 60'\text{（分）} \tag{61}$$

$$1'\text{（分）} = 60''\text{（秒）} \tag{62}$$

だから

$$\begin{aligned} 1\,\text{周} &= 360^\circ \\ &= (360 \times 60)' = 21600' \\ &= (360 \times 60 \times 60)'' = 1296000'' \end{aligned} \tag{63}$$

である．地球上では時間と経度の比が

$$\begin{aligned} \frac{1\,\text{日}}{1\,\text{周}} &= \frac{24\,\text{時間}}{360^\circ} = \frac{1\,\text{時間}}{15^\circ} \\ &= \frac{24 \times 60\,\text{分}}{(360 \times 60)'} = \frac{1\,\text{分}}{15'} \\ &= \frac{24 \times 60 \times 60\,\text{秒}}{(360 \times 60 \times 60)''} = \frac{1\,\text{秒}}{15''} \end{aligned} \tag{64}$$

である．つまり，経度 15 度につき 1 時間，経度 15 分につき 1 分の時差がある．

問 17. (i) 名古屋大学本部は東経 136 度 58 分 7 秒にある．インドのニューデリーは東経 77 度 12 分 31.8 秒にある．太陽が南中する（空の一番高い位置に昇る）時刻は，名大とニューデリーではどちらがどれだけ早いか．

(ii) 大阪城は東経 135 度 31 分 33.04 秒にある．太陽が南中する時刻は，名大と大阪城ではどちらがどれだけ早いか．

問 18. 弧度法（ラジアン）の定義を説明せよ．

問 19. 指数関数や三角関数の引数は無次元でなくてはならない．理由を言え．

加法的な量と密度的な量

2 つの系を合併させるとき，単純な足し算ができる量と，単純な足し算ができない量がある．例えば，100 g の食塩水と 200 g の食塩水を混ぜれば，300 g の食塩水になるという意味で,「100 g + 200 g = 300 g」という足し算は意味をなすが，濃度 3 % の食塩水 100 g と濃度 6 % の食塩水 200 g を混ぜても「3 % + 6 % = 9 %」の濃度になるわけではない．

ここで言う濃度は，質量パーセント濃度と呼ばれるものであり,

$$\text{濃度} = \frac{\text{食塩の質量}}{\text{食塩水の質量}} = \frac{X}{X+Y} = \rho \tag{65}$$

という無次元の数を 100 倍した値である．ここで，食塩水に溶けている塩の質量を X，水だけの質量を Y とした．食塩水全体の質量を $X+Y=M$ としてもよい．

足し算が可能な量は**保存量**，すなわち，**なくならない量，増えも減りもしない量**である．水と水の質量の足し算，塩と塩の質量の足し算などが可能である．

問 20．濃度 ρ_1 で質量 M_1 の食塩水と，濃度 ρ_2 で質量 M_2 の食塩水とを混ぜたときにできる食塩水の濃度 ρ を求める公式を作れ．また，濃度 3 % の食塩水 100 g と濃度 6 % の食塩水 200 g を混ぜてできる食塩水の濃度を求めよ．

問 21．「時速 30 km で 2 時間走ったあとで時速 60 km で 1 時間走ったなら，平均速度は $(30+60)/2=45$ で時速 45 km だ」．この推論のどこが間違っているか，検討せよ．正しい平均速度はいくらか．

問 22．SI 国際単位系とはどのようなものか，調べて説明せよ．CODATA （Committee on Data for Science and Technology，科学技術データ委員会）は 2018 年に物理定数と単位系の大改定を実施する．新しい単位系はどのようなものか，従来の単位系とどのように異なるか，説明せよ．

参考文献

[1] 国立天文台 編「理科年表」（丸善）．毎年出版されています．物理学に限らず，科学のデータが満載されています．

[2] 佐藤文隆，北野正雄「新 SI 単位と電磁気学」（岩波書店）．物理量を定義する・測るとはどういうことかについて深く考えられた良書です．